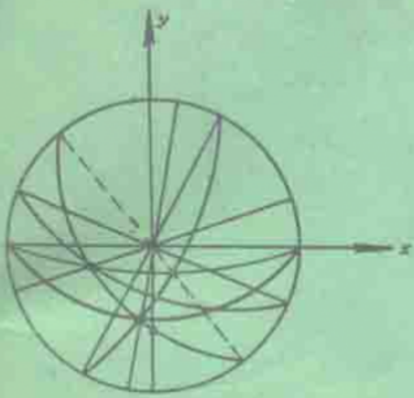


球面三角在机械工业中的应用

金凤久 编

国防工业出版社

球面三角在机械工业中的应用

球面三角在机械工业中的应用

金凤久 编

国防工业出版社

内 容 提 要

本书分三章。第一章介绍了球面几何、球面三角和球面作图的基本知识，并阐明了如何运用这种作球面图的新方法，来解决各种空间角度的计算问题。第二章讨论了空间点线面间相互位置关系中的尺寸计算问题，说明了如何将空间尺寸计算问题转化为平面尺寸计算问题。第三章列举了不同专业的一些应用实例。

本书可供机械工业的工程技术人员和大专院校的学生参考。

球面三角在机械工业中的应用

金凤久　编

责任编辑　张仁杰

*

国防工业出版社出版、发行

（北京市海淀区紫竹院南路23号）

新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印装

*

850×1168　1/32　印张$4^1/_2$　115千字

1990年6月第一版　1990年6月第一次印刷　印数：0,001—2,065册

ISBN 7-118-00541-X/O·39　　定价：2.85元

前　言

在机械设计和机械制造的各项工艺工作中，经常遇到空间角度和空间尺寸的计算问题。正确地解决这个问题，对我们所从事的工作具有十分重要的意义。

在空间角度和空间尺寸这两种计算问题中，角度问题是主要的，这个问题解决了，就可将空间尺寸问题化为平面尺寸问题。

球面三角，是解决空间角度计算问题的数学工具。但在机械工业上，这一数学工具还没有得到广泛应用。目前，在书刊上报导的一些应用，都局限于极为简单的问题。其解题步骤，是先作三平面相交所构成的角落，进而在这个角落处画出球面三角形，再代公式解题。这种应用方法，是离开了球面几何而孤立的作球面三角形，对于解复杂问题是很难的，甚至是不可能的。

这里所介绍的方法，是一种新的应用方法，我们称其为新球面三角法。这种方法的原理是：通过球心建立一空间直角坐标系，并将各有关直线与平面均平移至通过球心，从而在球面上就得到了表示这些直线与平面的一系列的截痕点与大圆，这些点与大圆所构成的球面几何图形（必要时还可适当连结一些辅助大圆），就表达了其间的角度关系，解其中的适当的一些球面三角形，就可得到问题的答案。根据这个原理，可制造书中介绍的大圆弧尺与球面量角器，应用它们作图，还可实现空间角度计算问题的图解法。

本书就是根据这种应用方法而编写的。我们除了引用马希克维奇著《球面三角学》的一些基本知识和公式外，还针对这一方法中最关键的作图问题，开辟了球面作图一节，讨论了各种常见作图问题。并进而对空间点、线、面间的相互位置问题作了系统讨论，除了解决其间的角度问题外，还将空间尺寸计算问题转化为平面尺寸计算问题。这就为全面解决空间角度和空间尺寸计算

问题提供了一个比较系统的方法。本书还列举了一些不同专业的应用实例，对由于变换角度、尺寸关系而产生的空间尺寸链问题也作了分析。

本书具有较多的数字运算，为了减分篇幅，计算过程一般都省略了。计算结果，对长度尺寸取到微米；对角度数值取到秒。

目　录

第一章　球面三角学的基本知识

球面三角学是解决空间角度计算问题的数学工具。目前，它在天文、航海和大地测量等方面都有了广泛的应用。而在机械工程的空间角度计算方面还应用得很少，而且这少许的应用也都局限于极简单的问题。这里，就它在机械设计与制造中的应用需要，引用球面三角学的一些基本知识和部分公式，加以适当的补充和说明。

§1　球面几何

球面几何是球面三角的基础，它是研究球面上的点、线和图形的性质的。

一、球面上的大圆与小圆

1．球面与球

在空间与一定点等距离的点的轨迹为一球面，包围在球面中的空间为一球。其定点叫做球心O，球心到球面的距离为球的半径R。

2．大圆与小圆

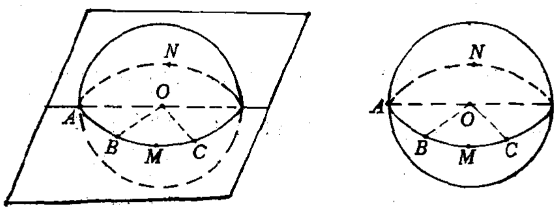
任一平面与球面相截，在球面上得到的截痕是圆。

当平面通过球心O时，其截痕圆最大，叫做大圆。如图1-1，截平面通过球心O，其截痕圆$\overparen{ABC}$是大圆。图(a)表示截平面截得大圆的情形；图(b)表示去掉截平面而保留其截痕的情形。从图可见，大圆所在的平面(简称大圆平面)就是截得此大圆的那个截平面。

当截平面不通过球心时，其截痕圆较小，叫做小圆。如图1-2，截平面不通过球心O，其截痕圆$\overparen{DEF}$是小圆。图(a)表示截平面截得小圆的情形，图（b）表示去掉截平面而保留其截痕

的情形。

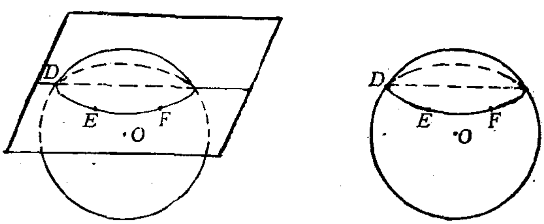
在球面几何中，一段大圆弧的长是用它所对应的中心角来度



(a) (b)

图 1-1

量的。即大圆弧的长，等于其两端点的两向心射线的夹角。如图 1-1，$\overset{\frown}{BC}$ 段大圆弧长等于它所对应的中心角 BOC。



(a) (b)

图 1-2

二、球面几何的基本定理

1．球面上的大圆分球面为相等的两部分。

因为大圆平面通过球心，所以大圆平面将球分为相等的两个半球。故球面上的大圆将球表面分为相等的两个半球面。

2．球面上的两个大圆必相交于球面上的两点，且此两点间的线段是球直径。

见图 1-3，因为两大圆平面 $\overset{\frown}{ABA_1}$ 和 $\overset{\frown}{ACA_1}$ 都通过球心，所以两大圆平面的交线必通过球心，即球面上两大圆的两交点间的线

段，恰好是球直径。

3．通过球面上非同一直径两端的两点能作且只能作一个大圆。

球面上非同一直径两端的两点加上球心，就是非同一直线上的三点。显然，过这三点只能作一个平面，即过球面上这样的两点只能作一个大圆。

4．球面上非同一直径两端的两点间的最短球面距离（以下简称球面距离），是此两点间所连结的小于180°的大圆弧。

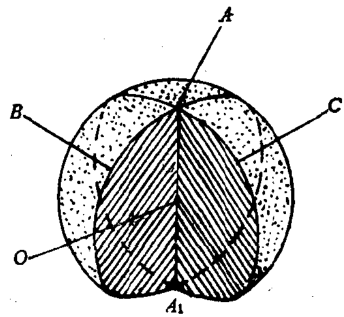


图 1-3

如图 1-1，B、C两点间的最短球面距离是大圆弧$\overset{\frown}{BMC}$，而不是$\overset{\frown}{BANC}$，也不是B、C两点间的任何小圆弧。

三、极与极线、球面角

1．极与极线

垂直于球面上任一圆所在平面的球直径的两端点，称做该圆的极，也叫做该圆的球面圆心。

圆上各点至其极（或球面圆心）的球面距离相等。此球面距离称做该圆的球面弧半径● 弧半径为 90°的圆是大圆，而弧半径不等于 90°（小于或大于 90°）的圆是小圆。

如图1-4，因为大圆$\overset{\frown}{ABC}$和小圆$\overset{\frown}{DEF}$所在两平面均垂直于OP（球的半径），所以点P同时是大圆$\overset{\frown}{ABC}$和小圆$\overset{\frown}{DEF}$的极，也称做此两圆的球面圆心。$\overset{\frown}{PE}$（或$\overset{\frown}{PF}$）弧长就是小圆$\overset{\frown}{DEF}$的球面弧半径；$\overset{\frown}{PB}$（或$\overset{\frown}{PC}$）弧长就是大圆$\overset{\frown}{ABC}$的球面弧半径，显然，$\overset{\frown}{PB}=\overset{\frown}{PC}=90°$。

● 引用弧半径的术语，是为了区别平面圆半径。弧半径是以弧长作半径，而平面圆半径是以线段长作半径的。

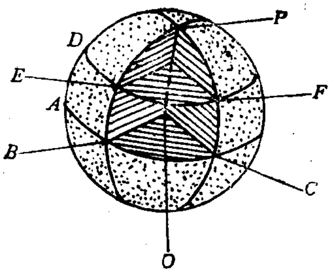


图 1-4

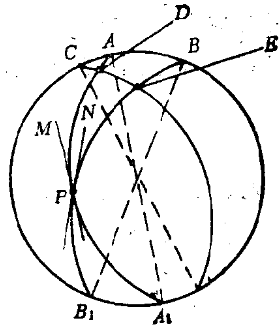


图 1-5

2. 球面角

球面上的两个大圆弧相交所成之角称为球面角。其交点叫做球面角的顶点，两个大圆弧叫做球面角的边。如图1-5，大圆弧$\widehat{APA_1}$和$\widehat{BPB_1}$相交于点P，则角APB就叫做球面角。

球面角的三种等效度量方法：

1） 球面角等于其顶点处切于角的两边的两切线间的夹角。

2） 球面角等于其两边所在两平面的夹角。

3） 球面角等于其两边间的角顶点的极线长。

如图1-5，若PM在$\widehat{APA_1}$大圆平面上，且切大圆$\widehat{APA_1}$于点P；PN在$\widehat{BPB_1}$大圆平面上，且切大圆$\widehat{BPB_1}$于点P；$\widehat{APA_1}$和$\widehat{BPB_1}$两大圆平面的夹角为φ；大圆$\widehat{CDE}$是点P的极线。则有：

$$\angle APB = \angle MPN = \varphi = \widehat{DE}$$

球面上的两个大圆，在球面上的每一交点处都形成了四个球面角。同平面上两直线交角一样，对顶角相等，相邻两角互补，四角和为360°。球面角可以是锐角、直角或钝角。

如图1-5，APA_1和BPB_1两个大圆在可见的一面交于点P，构成了图示的四个球面角，其中对顶角相等，相邻两角和为180°。如：

$$\angle APB=\angle A_1PB_1, \qquad \angle APB_1=\angle BPA_1$$

$$\angle APB+\angle BPA_1=\angle BPA_1+\angle A_1PB_1=\cdots\cdots=180^\circ$$

3．极与极线的性质、判断条件

极与其极线上各点连结大圆弧，其长都是 90°，而且它与极线间所成的球面角也都是 90°。

极与极线的判断条件：

（1）在球面上，若一点与某一大圆弧上的两点间的球面距离都是 90°，则该点是这个大圆弧的极。如图 1-6，若已知大圆弧 $\overset{\frown}{PA}$ 和 $\overset{\frown}{PB}$ 均为 90°，则点 P 是大圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的极。

（2）在球面上，若两个大圆弧均垂直于另一大圆弧，则前两大圆弧的交点是后一大圆弧的极。如图 1-6，若已知球面角 PAB 和 PBA 均为 90°，则点 P 是大圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的极。

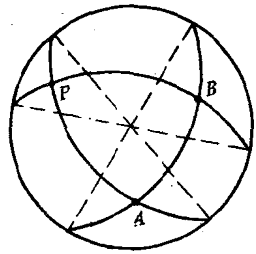


图 1-6

（3）在球面上，一点与一大圆弧上的某一点连结大圆弧，若其长是 90°，而且所连结的大圆弧与已知大圆弧垂直，则前一点是这个已知大圆弧的极。如图 1-6，若已知大圆弧 $\overset{\frown}{PA}$ 和球面角 PAB 均为 90°，则点 P 是大圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的极。

四、球面上的点、线与图形

1．球面上的点

综前所述可得：球面上的点就表示空间一条通过该点的向心直线。

通过球心的直线，在球面上有两个交点，它们是以球心为对称中心的对称点。显然，这两点表达了空间的同一直线。

2．球面上的线

球面上的线，是由球面上的无穷多个点组成的。从这个意义上说，球面上的线，就表示组成此线的无穷多个点的向心直线所构成的面。例如，大圆线就表示组成此线的无穷多个点的向心直

线所构成的平面；小圆线就表示组成此线的无穷多个点的向心直线所构成的圆锥面。简言之就是，大圆线就表示大圆平面；小圆线就表示小圆圆锥面。

3．球面上的图形

1） 球面二角形

球面上相交于两点的两个大圆弧所围成的球面的一部分，叫做球面二角形。球面二角形的两边均为180°，二角相等。

在球面上，延长球面二角形的两边，构成两个大圆，它们将球面分成四个球面二角形，相邻两个二角形构成半个球面，不相邻(对顶）的两个二角形全等。

2） 球面三角形

球面上相交于三点的三个大圆弧所围成的球面的一部分，叫做球面三角形。它有六个要素，即三边和三个角。通常以A、B、C表示它的三个角，而以a、b、c表示各角的对应边。图1-7中的图形ABC就是一球面三角形。

现在从球体中，把球面三角形ABC及其三个大圆平面所围成的球的一部分取出，构成图1-8所示的三面角锥O-ABC。它

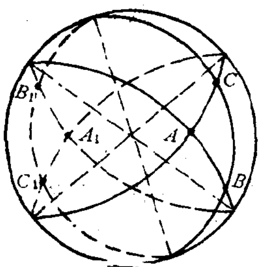


图 1-7

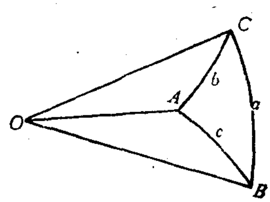


图 1-8

的顶点是球心O，它的棱是球心到球面三角形三顶点的球半径。从图1-8可以看出，球面三角形的六要素就表明了互不平行的三个平面间的角度关系。球面三角形的角，就表示其两边所在两平面的二面角。例如，角A就表示平面OAB和OAC的二面角。球

面三角形的边，就表示其余两边所在的两平面与此边所在的平面上的两交线的夹角，简称面角。例如，边 a 就表示角 BOC。这就是球面三角形的几何意义。

广义的讲，球面三角形的边与角，可以小于180°，也可以大于180°。对于具有大于180°的边（或角）的球面三角形，如延长它的某些边，则此三边的大圆必形成一些边角均小于180°的新球面三角形。解其中一新球面三角形，就可代替解原球面三角形。在以后的叙述中，我们所讲的都是边角均小于180°的球面三角形。

如图1-7，延长球面三角形 ABC 的三边而得三个大圆，它们间除了原有的三个交点外，又形成了三个新交点 A_1、B_1、C_1。三角形 ABC 和 $A_1B_1C_1$ 是以球心为对称中心的空间极对称图形。这两个三角形的对应要素分别相等，但移动其一不能使二者完全重合，因为其六要素排列次序相反。这两个三角形相互称为对方的对称三角形。

球面上三个大圆两两各相交于两点，共六个交点。每一大圆均被其余两大圆分割成四段，相邻两段之和为180°，不相邻（对顶）的两段相等。六个点、十二段大圆弧将球面分成八个球面三角形。在这些三角形中，如果知道一个三角形的六要素，则其余三角形的六要素就都知道了。

3） 极线三角形

见图1-9，以一球面三角形 ABC 的三顶点 A、B、C 为极，分别作其极线 $B'C'$、$A'C'$、$A'B'$。这三条极线两两相交构成一新的球面三角形 $A'B'C'$。此三角形叫做原三角形的极线三角形。

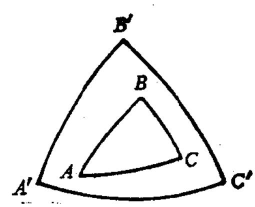


图 1-9

球面三角形与其球面极线三角形的相互位置，可能是相互包容或相互交叉的。

4） 球面多边形

在球面上，由多于三条大圆弧所构成的封闭图形，叫做球面

多边形。球面多边形可以用大圆弧连结成若干个球面三角形。

五、球面三角形与其极线三角形的关系

（1）球面三角形与其极线三角形的关系是相互的，即：原三角形的顶点是其极线三角形对应边的极；极线三角形的顶点也是原三角形对应边的极。

（2）球面三角形的角与其汲线三角形的对应边之和为180°；极线三角形的角与其原三角形的对应边之和也为180°。

六、球面三角形的性质

（1）在任一球面三角形中，一边小于其余两边之和而大于它们的差。

（2）在任一球面三角形中，三边之和大于0°而小于360°

（3）在任一球面三角形中，三角之和大于180°而小于540°。

（4）在任一球面三角形中，外角小于不相邻两内角之和，而大于它们的差。

（5）在同一球面三角形中，对等边的角相等，对等角的边也相等。

（6）在同一球面三角形中，对大边的角较大，对大角的边也较大。

七、垂直平分线与角分线

1. 垂直平分线

在球面上，某一大圆弧的垂直平分大圆弧，称为该大圆弧的垂直平分线。大圆弧的垂直平分线上的任一点至该大圆弧两端点的球面距离相等。

2. 角分线

在球面上，某一球面角的平分大圆弧，称为该球面角的角分线。球面角的角分线上的任一点至该角两边的球面距离相等。

七、球面三角形的外接圆和内切圆

球面三角形三边的垂直平分线，交于三角形外接圆的球面圆心。

球面三角形三角的角分线，交于三角形内切圆的球面圆心。

§2 球面三角

球面三角学是建立在球面几何基础上的。它的任务是研究球面三角形的边角关系，为解球面三角形服务。

一、球面三角形的基本定理

图 1-10 为一任意球面三角形，其三个角分别为 A、B、C，三条边分别为 a、b、c。它的边角关系有如下的几个基本定理：

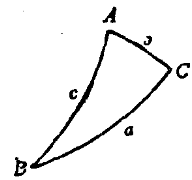


图 1-10

1. 正弦定理

$$\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\sin b}{\sin B}=\frac{\sin c}{\sin C} \qquad (1)$$

2. 边的余弦定理

$$\left.\begin{aligned}\cos a&=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A\\ \cos b&=\cos a\cos c+\sin a\sin c\cos B\\ \cos c&=\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos C\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

3. 角的余弦定理

$$\left.\begin{aligned}\cos A&=-\cos B\cos C+\sin B\sin C\cos a\\ \cos B&=-\cos A\cos C+\sin A\sin C\cos b\\ \cos C&=-\cos A\cos B+\sin A\sin B\cos c\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

4. 余切定理

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{ctg} a\sin b&=\operatorname{ctg} A\sin C+\cos b\cos C\\ \operatorname{ctg} a\sin c&=\operatorname{ctg} A\sin B+\cos c\cos B\\ \operatorname{ctg} b\sin a&=\operatorname{ctg} B\sin C+\cos a\cos C\\ \operatorname{ctg} b\sin c&=\operatorname{ctg} B\sin A+\cos c\cos A\\ \operatorname{ctg} c\sin a&=\operatorname{ctg} C\sin B+\cos a\cos B\\ \operatorname{ctg} c\sin b&=\operatorname{ctg} C\sin A+\cos b\cos A\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

这四组公式是球面三角形边角关系的基本公式。利用这些公式可以解决球面三角形的大部分计算问题。

二、半角公式

只有上述四组公式还不能解决球面三角形的一切计算问题，同时为了便于利用对数表进行笔算，就有必要再引用一些导出公式。

1．半角正切公式

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{tg}\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p\sin(p-a)}}\\\operatorname{tg}\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-c)}{\sin p\sin(p-b)}}\\\operatorname{tg}\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)}{\sin p\sin(p-c)}}\end{aligned}\right\}\qquad(5)$$

其中
$$p=\frac{1}{2}(a+b+c)$$

2．半边正切公式

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{tg}\frac{a}{2}&=\sqrt{\frac{-\cos P\cos(P-A)}{\cos(P-B)\cos(P-C)}}\\\operatorname{tg}\frac{b}{2}&=\sqrt{\frac{-\cos P\cos(P-B)}{\cos(P-A)\cos(P-C)}}\\\operatorname{tg}\frac{c}{2}&=\sqrt{\frac{-\cos P\cos(P-C)}{\cos(P-A)\cos(P-B)}}\end{aligned}\right\}\qquad(6)$$

其中
$$P=\frac{1}{2}(A+B+C)$$

3．纳皮尔公式

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}&=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\\\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}&=\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{tg}\frac{B+C}{2}&=\frac{\cos\frac{1}{2}(b-c)}{\cos\frac{1}{2}(b+c)}\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\\
\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}&=\frac{\sin\frac{1}{2}(b-c)}{\sin\frac{1}{2}(b+c)}\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\\
\operatorname{tg}\frac{A+C}{2}&=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-c)}{\cos\frac{1}{2}(a+c)}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\\
\operatorname{tg}\frac{A-C}{2}&=\frac{\sin\frac{1}{2}(a-c)}{\sin\frac{1}{2}(a+c)}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\\
\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}&=\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}\operatorname{tg}\frac{c}{2}\\
\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}&=\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}\operatorname{tg}\frac{c}{2}\\
\operatorname{tg}\frac{b+c}{2}&=\frac{\cos\frac{1}{2}(B-C)}{\cos\frac{1}{2}(B+C)}\operatorname{tg}\frac{a}{2}\\
\operatorname{tg}\frac{b-c}{2}&=\frac{\sin\frac{1}{2}(B-C)}{\sin\frac{1}{2}(B+C)}\operatorname{tg}\frac{a}{2}\\
\operatorname{tg}\frac{a+c}{2}&=\frac{\cos\frac{1}{2}(A-C)}{\cos\frac{1}{2}(A+C)}\operatorname{tg}\frac{b}{2}
\end{aligned}\right\}\qquad(7)$$

$$\operatorname{tg}\frac{a-c}{2}=\frac{\sin\frac{1}{2}(A-C)}{\sin\frac{1}{2}(A+C)}\operatorname{tg}\frac{b}{2}$$

有了公式(1)至(7)，就可以解决球面三角形的各种计算问题。即在球面三角形的六个要素中，若已知任意三个要素，就可以应用这些公式求出其余三个要素。

三、球面直角三角形和球面直边三角形

在球面三角形中，仅一角为 90° 的叫做球面直角三角形；仅一边为90° 的叫做球面直边三角形。

1. 计算公式

将直角(A)或直边(a)分别代入公式(1)至(4)，就得出球面直角三角形或球面直边三角形的计算公式，见下表。

球面直角三角形和球面直边三角形公式表

序号	球面直角三角形公式　($A=90°$)	球面直边三角形公式　($a=90°$)
1	$\cos a=\cos b\cos c$	$\cos A=-\cos B\cos C$
2	$\cos B=\sin C\cos b$	$\cos b=\sin c\cos B$
3	$\cos C=\sin B\cos c$	$\cos c=\sin b\cos C$
4	$\cos a=\operatorname{ctg}B\operatorname{ctg}C$	$\cos A=-\operatorname{ctg}b\operatorname{ctg}c$
5	$\sin c=\sin B\sin a$	$\sin C=\sin c\sin A$
6	$\sin b=\sin B\sin a$	$\sin B=\sin b\sin A$
7	$\cos C=\operatorname{ctg}a\operatorname{tg}b$	$\cos c=-\operatorname{ctg}A\operatorname{tg}B$
8	$\cos B=\operatorname{ctg}a\operatorname{tg}c$	$\cos b=-\operatorname{ctg}A\operatorname{tg}C$
9	$\sin c=\operatorname{tg}b\operatorname{ctg}B$	$\sin C=\operatorname{tg}B\operatorname{ctg}b$
10	$\sin b=\operatorname{tg}c\operatorname{ctg}C$	$\sin B=\operatorname{tg}C\operatorname{ctg}c$

2. 球面直角三角形的性质

球面直角三角形，除了具有一般三角形的性质外，还有下列的性质：

（1）在球面直角三角形中，若两直角边同时大于或同时小于90°，则斜边（直角的对边）必小于90°；若一直角边大于90°，而另一直角边小于90°，则斜边必大于90°。

（2）在球面直角三角形中，若其余两角同时大于或同时小于

90°，则斜边必小于90°；若其余两角一个大于 90°而另一个 小于90°，则斜边必大于90°。

（3）在球面直角三角形中，直角边与它的对应角必同时大于或同时小于 90°。

3．球面直边三角形的性质

球面直边三角形，除了具有一般三角形的性质外，还有下列性质：

（1）在球面直边三角形中，若直边的两邻角同时大于或同时小于90°，则直边的对角必大于90°；若直边的一邻角 大于 90°而另一邻角小于90°，则直边的对角必小于90°。

（2）在球面直边三角形中，若其余两边同时大于或同时小于90°，则直边的对角必大于90°；若其余两边一个大于 90°而 另一个小于90°，则直边的对角必小于90°。

（3）在球面直边三角形中，其余两边与它的对应角必同时大于或同时小于 90°。

四、球面三角形的解法

解球面三角形，就是根据一个三角形的足够的已知条件，求解未知要素。根据已知条件的不同，可分以下几种情况：

1．六要素均为 90°的球面三角形

六要素均为 90°的球面三角形，就相当于原点重合于 球心的空间直角坐标系的一个象限。这种三角形的每一角顶都是其对应边的极。

在一个球面三角形中，若已知三个均相邻（两边及其夹角或两角及其夹边）或均不相邻（三边或三角）的要素 都是 90°，根据极与极线的关系不难证明，它就是六要素均为 90°的球面三 角形。

2．四要素均为90°的球面三角形

四要素均为 90°的球面三角形，就是两角及其两对应边均为90°的球面三角形。它的第三角的角顶是它的对应边的极，故此两要素相等。

在球面三角形中，若已知任意两个要素均为 90°，则它 就是

这种三角形。这个问题，除了已知两对应要素均为90°这种情况外，对其余各种情况，都可根据极与极线的关系得到证明，并且哪四个要素均为 90° 是确定的；而对于已知两对应要素均为 90° 的这种情况，根据球面三角形的四组基本公式可知，还必然有两个对应要素都是90°，所以它是这种三角形，但判断还有哪两个对应要素都是90°，还得知道某一补充条件。

这种球面三角形，除了这四个90°的要素外，还得知道一个条件，三角形才是确定的。

3．球面直角三角形和球面直边三角形

如前所述，在一球面三角形的已知要素中，若仅有一角为90°，则它就是球面直角三角形；若仅有一边为 90°，则它就是球面直边三角形。

在球面直角三角形或球面直边三角形中，除直角或直边的条件外，再知道任意两个要素，就可应用其公式求出其余三个要素。在三角形的命名时，对直角三角形必须令直角为 A，其余两角分别为 B、C，各边为其对角的小写字母 a、b、c；对直边三角形必须令直边为 a，其余两边分别为 b、c，各角为其对边的大写字母 A、B、C；以适应公式的情况。

在解题中，若未知要素是以它的余弦、正切或余切函数求出时，则解答是唯一的。若未知要素是以它的正弦函数求出时，则解答有如下的几种情况：

（1）函数值等于1，则解答是唯一的，为90°。此时这个三角形，就属于前两种三角形的一种。

（2）函数值小于1，并且此函数值是以所求要素的对应要素求出时，按性质（3），所求要素与其对应要素必同时大于或同时小于90°，故解答是唯一的。

例如用公式

$$\sin b = \sin B \sin a$$

求 b。因为 b 与 B 必同时大于或同时小于90°，而 B 是已知的，故 b 有唯一的解。

（3）函数值小于1，并且此函数值是以两个对应要素求出时，则有两个互为补角的解。

例如用公式

$$\sin c = \operatorname{tg} b \operatorname{ctg} B$$

求 c。则 c 有两个互为补角的解。此时，在这个三角形的其余两未知要素 a、C 中，若能确定一个是大于还是小于 90°，则根据三角形的性质，就可断定 c 是大于还是小于 90°。

4. 球面一般三角形

在一球面三角形的已知要素中，若没有等于 90° 的要素，则它就是球面一般三角形。

在球面一般三角形中，若已知任意三个要素，就可应用上述公式求出其余三个要素。在三角形的命名时，只要角分别为 A、B、C，边分别为其对角的小写字母 a、b、c，就可按公式求解了。根据已知条件的情况，可分为以下的几种情形：

（1）已知三边，求角用公式（2）或（5）。

（2）已知三角，求边用公式（3）或（6）。

（3）已知两边及其夹角，求角用公式（4）或（7）；求边用公式（2），或在两角求出后用公式（7）。

（4）已知两角及其夹边，求边用公式（4）或（7）；求角用公式（3），或在两边求出后用公式（7）。

（5）已知两边及其中一边的对角，求另一已知边的对角用公式（1）；求未知边及其对角，须在前述角求出后用公式（7）。

（6）已知两角及其中一角的对边，求另一已知角的对边用公式（1）；求未知角及其对边，须在前述边求出后用公式（7）。

在应用公式（1）解题时，解的情况需要进行判断，以确定其解是大于还是小于 90°。

例如用公式

$$\sin B = \frac{\sin b}{\sin a} \sin A$$

求 B。B 的解可根据球面三角形的性质和公式

$$\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$$

进行判断。因为三角形的边角均小于180°，所以 $\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$ 和 $\cos\frac{1}{2}\cdot(a-b)$ 恒为正，故 $\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}$ 和 $\cos\frac{1}{2}(a+b)$ 必同时为正或同时为负。据此关系和 A、a、b 的数值情况，就可以断定 B 是大于还是小于 90°。具体判断情况如下：

（1）函数值等于 1，则 B 有唯一的解，为90°。

（2）函数值小于 1，则有以下的两种情况：

第一种情况：$A<90°$

若 $a>b$，根据同一球面三角形大边对大角的性质，可知 $A>B$，而 $A<90°$，所以 $B<90°$。B 有唯一的解。

若 $a<b$，且 $a+b=180°$，则 $\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}$ 为无穷大，即 $A+B=180°$，而 $A<90°$，所以 $B>90°$。B 有唯一的解。

若 $a<b$，且 $a+b>180°$，则 $\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}$ 为负值，即 $A+B>180°$，而 $A<90°$，所以 $B>90°$。B 有唯一的解。

若 $a<b$，且 $a+b<180°$，则 $\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}$ 为正值，即 $A+B<180°$，而 $A<90°$，所以 B 可能小于90°，也可能大于90°。B 有两个互为补角的解。

第二种情况：$A>90°$

若 $a<b$，根据同一球面三角形大边对大角的性质，可知 $A<B$，而 $A>90°$，所以 $B>90°$。B 有唯一的解。

若 $a>b$，且 $a+b=180°$，则 $\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}$ 为无穷大，即 $A+B=180°$，而 $A>90°$，所以 $B<90°$。B 有唯一的解。

若 $a>b$，且 $a+b<180°$，则 $\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}$ 为正值，即 $A+B$

$<180^{\circ}$，而$A>90^{\circ}$。所以$B<90^{\circ}$。B有唯一的解。

若$a>b$，且$a+b>180^{\circ}$，则$\mathrm{tg}\dfrac{A+B}{2}$为负值，即$A+B>180^{\circ}$，而$A>90^{\circ}$，所以$B$可能大于$90^{\circ}$，也可能小于$90^{\circ}$。故$B$有两个互为补角的解。

§3 球面作图

在应用球面三角解决空间角度计算问题时，球面作图是重要的第一步。所谓空间角度计算，就是计算空间某些直线和平面之间的各种角度关系。通过球面作图，就将这种空间角度计算问题转化为球面几何与球面三角问题了。

一、球面作图的一般概述

顾名思义，球面作图本应在立体的球面上作图。如能这样，就可按比例作图，按比例测量所求要素，即可实现空间角度计算问题的图解法。但在立体的球面上作图，就要有一套球面作图工具，这是不方便的。所以通常还是采用平面投影作图。下面就谈谈这两种作图问题。

1. 在立体的球面上按比例作图

在立体球面上作图就要有一套作图工具：

1）球面

因为球面上的图形都是空间极对称图形，所以在半个球面上作图就够了，故只要有半个球面就可以了。为了作图的方便，我们取略大于半球的球面，如图1-11。图（a）为它的立体图，图（b）为它的逆z轴方向的投影图。在其上画出三个相互垂直的大圆弧，用以表示xy、xz、yz三个坐标面。这三个大圆弧间的交点X、$-X$、Y、$-Y$、Z，分别表示坐标轴x、y、z的正负半轴（z的负半轴在剖掉部分的球面上）。球的半径可大可小，半径大，作图的准确度较高。但半径太大又显得笨重，而且作图也不方便。一般取半径等于100～150mm较为适宜。

2）大圆弧尺与球面量角器

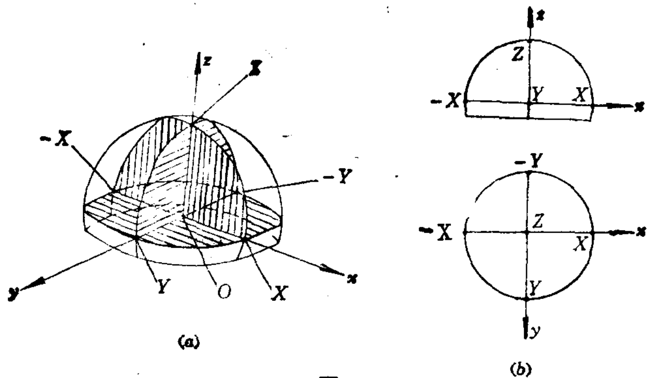


图 1-11

大圆弧尺与球面量角器的构造见图1-12，图（a）是它的立体图，图（b）是它的投影图。它的内球面半径R与图1-11的球面半径相同。在S尺上均匀地刻180°个刻度，每格1°；在L尺上按α角度值刻度，当α为120°时就刻120个刻度，每格1°。α角度值可在180°范围内任意选取，当取α角度值较大时，大圆弧尺就较长。从图示的构造可见，用S尺可以测量球面角；用L尺可在球面上画出大圆弧线，也可用它测量大圆弧的长。很明显，当α角取为180°时，S、L尺的作用相同，即都可用以量、作大圆弧，也都可用以量、作球面角。

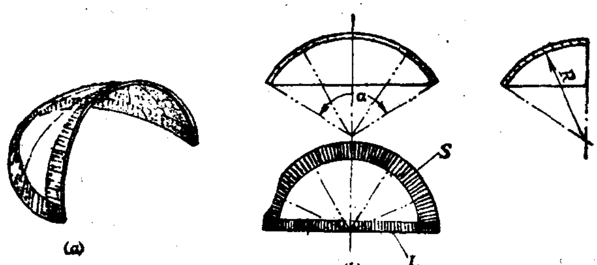


图 1-12

3）圆规

圆规就是一般的平面作图圆规，没有什么特殊的。但用圆规

在球面上画小圆时，必须在大圆弧尺上取一定的角度（实际上是该角度的大圆弧的弦长）作半径。

有了上述的一套球面作图工具，就可在球面上按比例作图、按比例测量所求要素。这种按作图测量所求要素的方法，就叫做球面图解法。同平面几何的图解法一样，它的准确度较低。对准确度要求不高的可用图解法解题，对准确度要求较高的必须用计算法解题。在采用计算法解题时，在球面上按比例作图，可帮助我们直观准确地作图，帮助我们分析问题，并可对计算结果起一定的校验作用。

在球面上按比例作图的立体感强，便于掌握，对初学者是很有帮助的。但这种作图工具的制作和携带都不方便，所以还是大量采用投影的平面作图法。

2. 在平面上作投影图

在平面上画一圆周，用以表示一坐标面。再画出此圆周的两个相互垂直的直径，用以表示另两个坐标面，如图1-13所示。大圆 XY、YZ、XZ 就表示三坐标面，其交点 X、$-X$、Y、$-Y$、Z，就分别表示坐标轴 X、Y、Z 的正负半轴（Z 轴的负半轴重合于点 Z 并在纸面的下方）。圆周内的圆面，就表示坐标面 XY 上方的半个球面。球面上的大圆弧、点均以它在这个圆面上的投

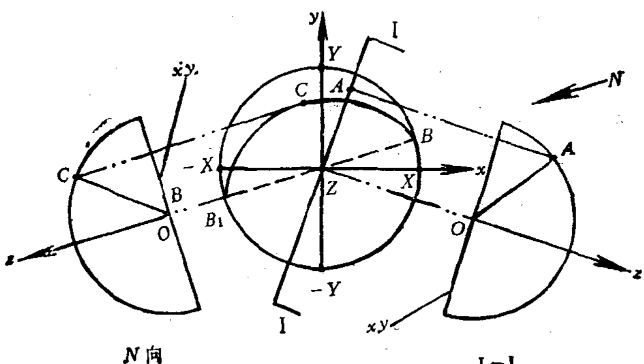


图 1-13

影来表示。图中，点A就表示Ⅰ-Ⅰ剖面上的OA直线；大圆弧$\overset{\frown}{BCB_1}$就表示N向视图中的通过BC且垂直于视图纸面的平面。

上图说明了通过球心的直线与平面在球面上所得点与大圆弧的投影画法。因为投影画法麻烦，而且也没有这样作图的必要。所以在应用中，还是采用粗略的投影作图法。在粗略作图时，一般只要把直线和平面的方位表示清楚就可以了。对表示多个直线与平面的较复杂的球面投影图，由于都是采用粗略作图，其间交点的相互位置可能搞错。但经计算之后，分析计算结果，还可以纠正过来。

二、球面作图的几个基本问题

因为球面三角只解决空间直线、平面间的角度问题。而直线和平面在空间任意平移，其间的角度关系不变。所以在球面上作图时，可任意平移直线和平面。由此，可得如下的作图原理：若将某一空间直角坐标系及其中的一些直线、平面画在球面上，先将这些直线和平面都平移至通过原点，再以原点为球心作一球面，则在球面上，就得到了这个坐标系及平移至原点后的各直线、平面的截痕。由这些截痕点和大圆弧所构成的球面图形，就是我们所要作的球面图形，将它投影到纸平面上，就是我们所要作的球面投影图。这个球面图形(或球面投影图)，就将直线、平面间的角度关系全部表达出来了。很明显，当直线和平面均平移至通过坐标原点后，对直线，只有重合于某坐标轴、过原点且在某坐标面上和通过原点的一般直线这三种情况；对平面，也只有重合于某坐标面、通过某坐标轴和通过原点的一般平面这三种情况。下面就谈谈直线与平面的这几种基本情况的作图问题。

为了帮助我们掌握在立体球面上按比例作图和在平面上作球面投影图这两种方法，也为了便于对照，这里就采用这两种方法进行作图，并综合叙述之。

1. 坐标面与坐标轴的画法

这种作图问题很简单，并已于前面讲了，这里不再重复。

见图1-11和1-13，根据极与极线的定义可知，点X、Y、Z

分别是大圆 YZ、XZ、XY 的极。又根据极与极线的性质可知，$\angle XYZ$、$\angle XZY$、$\angle YXZ$ 三个球面角和 $\overset{\frown}{XY}$、$\overset{\frown}{XZ}$、$\overset{\frown}{YZ}$ 三段大圆弧均为90°。

2．过原点且位于坐标面上的直线的画法

首先作出表示各坐标面的大圆和表示各坐标轴的点。其次在表示已知直线所在坐标面的大圆上，找出表示该直线的点。哪一点呢？直线在某两个半轴之间，点就在表示该两半轴的两点之间；直线与某半轴的夹角为已知，点与表示该半轴的点的球面距离就等于这个已知角。这样，表示已知直线的点就确定了。

如图1-14，直线 od 在坐标面 yz 上，且 $\angle bod=\alpha$ 将直线 od 画在立体的球面上，如图 1-15（a）；将直线 od 画在球面的平面投影图上，如图1-15（b）。因为直线 od 在坐标面 yz 上，又位于 y、z 两半轴之间，且 $\angle bod=\alpha$。所以表示直线 od 的点 D，就应在表示 yz 的大圆 $\overset{\frown}{BC}$ 上，又位于表示 y、z 两半轴的点 B、C 之间，且大圆弧 $\overset{\frown}{BD}=\alpha$。这样，表示直线 od 的点 D 就确定了。

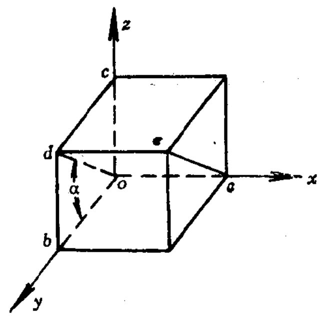


图 1-14

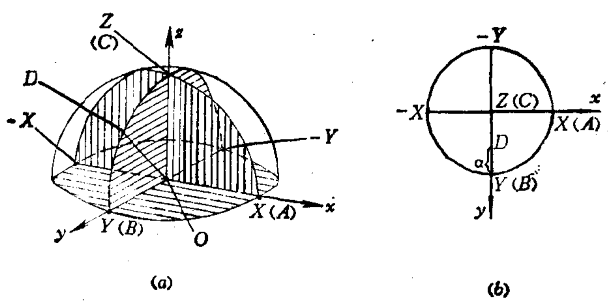


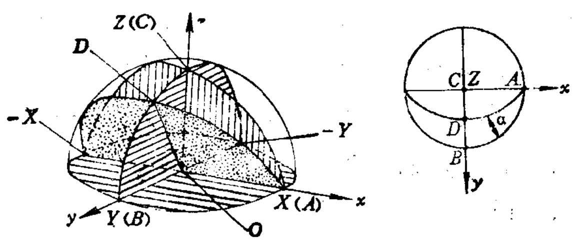
图 1-15

显然，图 1-15 中的各大圆弧就分别表示图 1-14 中的各相应角，如$\overset{\frown}{BD}=\angle bod$, $\overset{\frown}{CD}=\angle cod$, 并且$\overset{\frown}{BD}+\overset{\frown}{CD}=\angle bod+\angle cod=90^\circ$。

3. 通过坐标轴的平面的画法

首先作出表示三坐标面的大圆和表示三坐标轴的点。其次在已知平面所在的象限内作一表示此平面的大圆。此大圆的位置怎样呢？平面通过哪个坐标轴，大圆就通过表示该轴的点；平面与哪个坐标面的夹角为已知，大圆与表示该坐标面的大圆所成的球面角就等于这个已知角。这样，表示已知平面的大圆就确定了。

如图1-14，平面 $odea$ 通过坐标轴 x，它与坐标面 xy 的夹角为 α。将此平面画在立体的球面上，如图1-16(a)；将此平面画在球面的平面投影图上，如图1-16(b)。因为平面在第一象限内，



(a) (b)

图 1-16

又通过坐标轴 x，且与坐标面 xy 间的夹角为 α。所以表示平面 $odea$ 的大圆就在第一象限内，又通过表示坐标轴 x 的点 A，且球面角 BAD 等于角 α。这样，表示平面 $odea$ 的大圆 $\overset{\frown}{AD}$ 就确定了。

在图1-16中，因为点 A 是大圆 $\overset{\frown}{BC}$ 的极，所以$\angle BAD=\overset{\frown}{BD}$，并且$\angle ADB=90^\circ$。

4. 通过原点的一般直线的画法

这种直线的作图问题，有了前面的作图基础就不难了。下面我们以图1-17的直线 od 为例，来说明这种直线的作图方法。

直线 od 是通过原点的一般直线。它在坐标面 xy、yz、xz 上的投影线分别是 ob、oe、oh，这些投影线在各自的坐标面都有它的方位角。$\angle bod$、$\angle eod$、$\angle hod$ 分别是直线 od 与坐标面 xy、yz、xz 的夹角；$\angle cod$、$\angle aod$、$\angle fod$ 分别是直线 od 与坐标轴 x、y、z 的夹角。并且 $\angle bod+\angle fod=90^\circ$，$\angle eod+\angle cod=90^\circ$，$\angle hod+\angle aod=90^\circ$。所以，直线 od 有六个方位角，即它在三个坐标面上的投影角和它与三坐标轴的夹角。

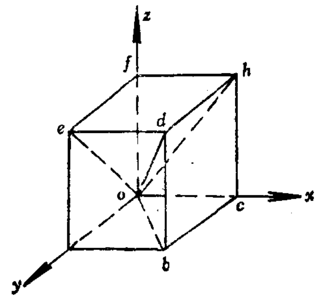
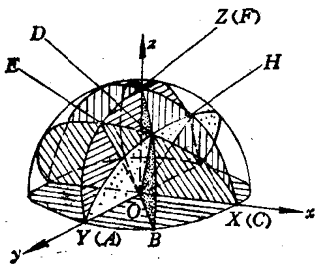


图 1-17

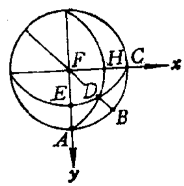
在直线 od 的六个方位角中，如知道其中的任意两角，就可在立体的球面上按比例作图，并从图测出其余各角；也可在平面上作球面投影图，并经计算求出其余各角。下面就根据已知条件的不同，分三种情况来讨论。

（1）若已知直线 od 在两个坐标面上的投影角（设已知 $\angle cob$ 和 $\angle aoe$），怎样将直线 od 画在球面图上，又怎样求出其余各方位角呢？

在立体球面上作图，见图1-18（a）；在平面上作球面投影图，见图1-18（b）。首先取定坐标面和坐标轴。在大圆 $\overset{\frown}{CA}$ 上取 $\overset{\frown}{CB}=$



(a)



(b)

图 1-18

$\angle cob$，在大圆 $\overset{\frown}{AF}$ 上取 $\overset{\frown}{AE}=\angle aoe$，得表示直线 ob、oe 的点 B、E。通过点 B、E 分别作垂于大圆 $\overset{\frown}{CA}$、$\overset{\frown}{AF}$ 的两个大圆 $\overset{\frown}{BD}$、$\overset{\frown}{ED}$，此两大圆必分别通过 $\overset{\frown}{CA}$、$\overset{\frown}{AF}$ 的极点 F、C。显然，大圆 $\overset{\frown}{BF}$、$\overset{\frown}{EC}$ 就分别表示平面 bod、eod，其交点 D 就表示直线 od。通过点 A、D 作大圆 $\overset{\frown}{AH}$，因为点 A 是大圆 $\overset{\frown}{CF}$ 的极，所以大圆 $\overset{\frown}{AH}$ 和 $\overset{\frown}{CF}$ 垂直，即 $\angle AHC=90°$。故大圆 $\overset{\frown}{AH}$ 就表示平面 aod。

据球面几何的基本知识可知，图 1-18 中的各大圆弧之长就分别表示图 1-17 中的各相应角，如：$\overset{\frown}{CB}=\angle cob$、$\overset{\frown}{AB}=\angle aob$，$\overset{\frown}{AE}=\angle aoe$，$\overset{\frown}{FE}=\angle foe$，$\overset{\frown}{CH}=\angle coh$，$\overset{\frown}{FH}=\angle foh$，$\overset{\frown}{BD}=\angle bod$，$\overset{\frown}{FD}=\angle fod$，$\overset{\frown}{ED}=\angle eod$，$\overset{\frown}{HD}=\angle hod$，$\overset{\frown}{CD}=\angle cod$，$\overset{\frown}{AD}=\angle aod$。并且，$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{CB}=\angle aob+\angle cob=90°$，$\overset{\frown}{AF}=\overset{\frown}{AE}+\overset{\frown}{FE}=\angle aoe+\angle foe=90°$，$\overset{\frown}{CF}=\overset{\frown}{CH}+\overset{\frown}{FH}=\angle coh+\angle foh=90°$，$\overset{\frown}{BF}=\overset{\frown}{BD}+\overset{\frown}{FD}=\angle bod+\angle fod=90°$，$\overset{\frown}{EC}=\overset{\frown}{ED}+\overset{\frown}{CD}=\angle eod+\angle cod=90°$，$\overset{\frown}{AH}=\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{HD}=\angle aod+\angle hod=90°$。

假如上述的作图是在真实的立体球面上进行的，就可用大圆弧尺测出其余各大圆弧的长，从而得直线 od 的其余各方位角。如果作图是在纸平面上进行的，就必须从适当的球面三角形中求解。例如从球面直角 $\triangle BCD$ 中（已知 $\angle CBD=90°$，$\angle BCD=\overset{\frown}{AE}=\angle aoe$，$\overset{\frown}{BC}=\angle boc$）求 $\overset{\frown}{CD}$（即 $\angle cod$）、$\overset{\frown}{BD}$（即 $\angle bod$）；再从球面直边 $\triangle ACD$ 中（已知 $\overset{\frown}{AC}=90°$，$\angle ACD=\overset{\frown}{AE}=\angle aoe$，$\overset{\frown}{CD}$ 已于前面求出）求 $\overset{\frown}{AD}$（即 $\angle aod$）、$\angle CAD$（即 $\overset{\frown}{CH}$ 或 $\angle coh$）。从而就解得了直线 od 的其余各方位角。

（2）若已知直线 od 与某两坐标轴的夹角（设已知 $\angle aod$ 和

$\angle fod$)，怎样将直线 od 画在球面上，又怎样求出直线 od 的其余各方位角呢？

仍见图1-18（a）与（b），首先取定坐标面和坐标轴。以点 A、F 为球面圆心，并分别以 $\angle aoe$、$\angle fod$ 为半径画两个小圆弧，在 od 直线的所在象限内相交于点 D，则点 D 就表示直线 od。为了表示它的各方位角，通过点 D 作分别垂直于大圆 $\overset{\frown}{AC}$、$\overset{\frown}{AF}$、$\overset{\frown}{CF}$ 的三个大圆 $\overset{\frown}{DB}$、$\overset{\frown}{DE}$、$\overset{\frown}{DH}$，此三个大圆必分别通过 $\overset{\frown}{AC}$、$\overset{\frown}{AF}$、$\overset{\frown}{CF}$ 的极 F、C、A。显然，大圆 $\overset{\frown}{DB}$、$\overset{\frown}{DE}$、$\overset{\frown}{DH}$ 就分别表示平面 dob、doe、doh。

同前面一样，假如作图是在真实的立体球面上进行的，就可测得直线 od 的其余各方位角。如果作图是在平面上进行的，就必须从适当的球面三角形中求解。例如从球面直边 $\triangle ADF$ 中（已知 $\overset{\frown}{AF}=90^\circ$，$\overset{\frown}{AD}=\angle aod$，$\overset{\frown}{FD}=\angle fod$）求 $\angle AFD$（即 $\overset{\frown}{AB}$ 或 $\angle aob$）、$\angle FAD$（即 $\overset{\frown}{FH}$ 或 $\angle foh$）；再从球面直角 $\triangle EDF$ 中（已知 $\angle FED=90^\circ$，$\overset{\frown}{FD}=\angle fod$，$\angle EFD$ 已于前面求出）求 $\overset{\frown}{ED}$（即 $\angle eod$）、$\overset{\frown}{FE}$（即 $\angle foe$）。从而就解得了直线 od 的其余各方位角。

（3）若已知直线 od 在某一坐标面上的投影角和它与另一坐标轴的夹角（设已知 $\angle cob$ 和 $\angle aod$），又怎样将直线 od 画到球面上，怎样求出它的其余各方位角呢？

见图1-18（a）与（b），首先取定坐标面和坐标轴。在大圆 $\overset{\frown}{CA}$ 上取 $\overset{\frown}{CB}=\angle cob$，得表示直线 ob 的点 B。通过点 B、F 作大圆，因为点 F 是大圆 $\overset{\frown}{CA}$ 的极，所以大圆 $\overset{\frown}{BF}$ 垂直于 $\overset{\frown}{CA}$，即大圆 $\overset{\frown}{BF}$ 表示平面 bof。以点 A 为球面圆心，以 $\angle aod$ 为半径画一小圆弧，在 od 直线的所在象限内交 $\overset{\frown}{BF}$ 于点 D，则点 D 就表示直线 od。为了表示它的其余各方位角，我们通过点 D 作分别垂直于大圆 $\overset{\frown}{AF}$、$\overset{\frown}{CF}$ 的大圆 $\overset{\frown}{DE}$、$\overset{\frown}{DH}$，同理此两大圆必通过点

C、A。大圆 $\overset{\frown}{DE}$、$\overset{\frown}{DH}$ 就分别表示平面 doe、doh。

与前相同，如在真实的球面上作图，就可用图解法解题。如在平面上作图，就必须从适当的球面三角形中求解。如从球面直角$\triangle ABD$中(已知$\angle ABD=90^\circ$，$\overset{\frown}{AD}=\angle aod$，$\overset{\frown}{AB}=90^\circ-\overset{\frown}{CB}=90^\circ-\angle cob$)求$\overset{\frown}{BD}$(即$\angle bod$)、$\angle BAD$(即$\overset{\frown}{CH}$或$\angle coh$)；再从球面直角$\triangle AED$中(已知$\angle AED=90^\circ$，$\overset{\frown}{AD}=\angle aod$，$\angle EAD=90^\circ-\angle BAD$) 求$\overset{\frown}{AE}$ (即$\angle aoe$)、$\overset{\frown}{ED}$(即$\angle eod$)。从而就解得了直线 od 的其余各方位角。

5．通过原点的一般平面的画法

这种平面的作图问题，有了前面的作图基础就不难了。下面以图1-19的平面boa 为例，来说明这种平面的作图方法。

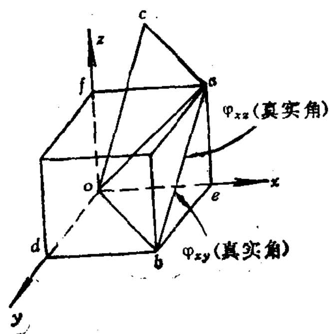


图 1-19

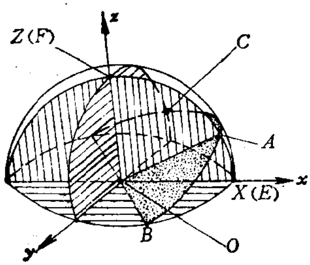
平面 boa 是通过原点的一般平面。通过原点 o 作直线 ba 的平行线 oc，则此直线就是平面 boa 在坐标面yz 上的交线。而直线 oa、ob 又分别是平面boa 在坐标面xz、xy 上的交线。直线 oa、ob、oc在其各自的坐标面上都有个方位角。同时，平面 boa 与坐标面 xy、xz、yz 间又分别形成三个二面角。根据立体几何的知识可知，两个平面在空间相交形成四个二面角，对顶的两角相等，相邻的两角互补。这里分别以 φ_{xy}、φ_{xz}、φ_{yz} 表示平面 boa 与坐标面 xy、xz、yz 间的不大于 90° 的二面角。可见，平面 boa 有六个方位角，即平面 boa 在三个坐标面上的交线的方位角和它与三坐标面的二面角。

在平面 boa 的六个方位角中，若已知其中任意两角，就可以在立体球面上按比例作图，并从中测出其余各角；也可以在平面上

作球面投影图，并经计算求出其余各角。下面就根据已知条件的不同，分四种情况来讨论。

（1）若已知平面 boa 在两个坐标面上的交线的方位角(设已知$\angle eob$ 和$\angle eoa$)，试将平面 boa 画在球面上，并求它的其余各方位角。

在立体球面上作图，如图1-20(a)；在平面上作球面投影图，如图1-20(b)。首先取定坐标面和坐标轴。在大圆 $\overset{\frown}{ED}$ 上取 $\overset{\frown}{EB}=\angle eob$，在大圆 $\overset{\frown}{EF}$ 上取 $\overset{\frown}{EA}=\angle eoa$，得分别表示直线 ob、oa的点 B、A。通过点 B、A 作大圆，则此大圆就表示平面boa。延长大圆 $\overset{\frown}{BA}$ 交大圆 $\overset{\frown}{DF}$ 于点 C，则点 C 就表示直线oc。



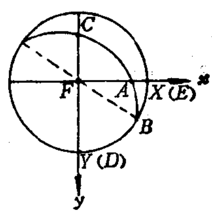


图 1-20

据球面几何的基本知识可知，图 1-20 中的各大圆弧和球面角就分别表示图1-19中的各相应角，如 $\overset{\frown}{EB}=\angle eob$，$\overset{\frown}{EA}=\angle eoa$，$\overset{\frown}{FC}=\angle foc$，$\angle EBA=\varphi_{xy}$，$\angle EAB=\varphi_{xz}$，$\angle FCA=\varphi_{yz}$。又据极与极线的关系或球面角的度量方法可知$\angle AEB=90^\circ$，$\angle AFC=90^\circ$。

如果作图是在真实的立体球面上进行的，就可用大圆弧尺测出大圆弧 $\overset{\frown}{FC}$ 的长，从而可知$\angle foc$；也可用球面量角器测出球面角 EBA、EAB 和 FCA。如作图是在平面上进行的，就必须从适当的球面三角形中求解。如从球面直角$\triangle AEB$ 中（已知

$\angle AEB=90^\circ$，$\overset{\frown}{EB}=\angle eob$, $\overset{\frown}{EA}=\angle eoa$) 求$\angle EBA$(即 φ_{xy})、$\angle EAB$ (即 φ_{xz})；再从球面直角$\triangle AFC$ 中 (已知$\angle AFC=90^\circ$，$\overset{\frown}{AF}=90^\circ-\overset{\frown}{EA}=90^\circ-\angle eoa$, $\angle FAC=\angle EAB$) 求$\overset{\frown}{FC}$ (即$\angle foc$)、$\angle FCA$(即 φ_{yz})。从而就解得了平面 boa 的其余各角。

（2）若已知平面 boa 在一坐标面上的交线的方位角和它与此坐标面的二面角（设已知$\angle eoa$ 和 φ_{xz})，将平面画在球面上并求出它的其余各方位角。

仍见图1-20(a)与(b)，首先取定坐标面和坐标轴。在大圆$\overset{\frown}{EF}$上取$\overset{\frown}{EA}=\angle eoa$，得表示直线 oa 的点A。通过点A并按角 φ_{xz} 的方位作球面角 EAB，使之等于 φ_{xz}。则大圆$\overset{\frown}{AB}$就表示平面 boa。延长大圆弧$\overset{\frown}{BA}$交大圆$\overset{\frown}{DF}$于点C，则点C就表示直线 oc。

同前面一样，如在真实的立体球面上作图，就可用图解法解题，如在平面上作图，就必须从适当的球面三角形中求解。例如从球面直角$\triangle EAB$ 中 (已知$\angle BEA=90^\circ$，$\angle EAB=\varphi_{xz}$，$\overset{\frown}{EA}=\angle eoa$)求$\overset{\frown}{EB}$ (即$\angle eob$)、$\angle EBA$(即 φ_{xy})；再从球面直角$\triangle FAC$ 中 (已知$\angle AFC=90^\circ$，$\overset{\frown}{AF}=90^\circ-\overset{\frown}{EA}=90^\circ-\angle eoa$，$\angle FAC=\angle EAB=\varphi_{xz}$)求$\overset{\frown}{FC}$(即$\angle foc$)、$\angle FCA$(即$\varphi_{yz}$)。这样平面$boa$的其余各方位角就知道了。

（3）若已知平面 boa 在某一坐标面上的交线的方位角和它与另一坐标面的二面角（设已知$\angle eob$ 和 φ_{yz})，将平面画在球面上并求出它的其余各方位角。

见图1-20（a）与（b），首先取定坐标面和坐标轴。在大圆$\overset{\frown}{ED}$上取$\overset{\frown}{EB}=\angle eob$，得表示直线 ob 的点B。通过点B并按角 φ_{xz} 的方位作球面角 BAE，使之等于 φ_{xz}。则此大圆就表示平面 boa。延长大圆弧$\overset{\frown}{BA}$交大圆$\overset{\frown}{DF}$于点C，则点C就表示直线oc。

求解方法与前相似。

（4）若已知平面 boa 与两个坐标面的夹角（设已知 φ_{xy} 和 φ_{xz}），将平面画在球面上并求出它的其余各方位角。

这种情况，若在平面上近似作图是容易的；若在真实的球面上按比例作图，就要借助于 $\triangle ABE$ 的极线三角形进行作图。

首先近似作图，为使平面投影图的上述极线三角形位于可见的一侧，我们将坐标面 yz 置于纸面上，如图 1-21(a)。因为平面 boa 与坐标面 xy、xz 所构成的三面角锥位于第一象限内，所

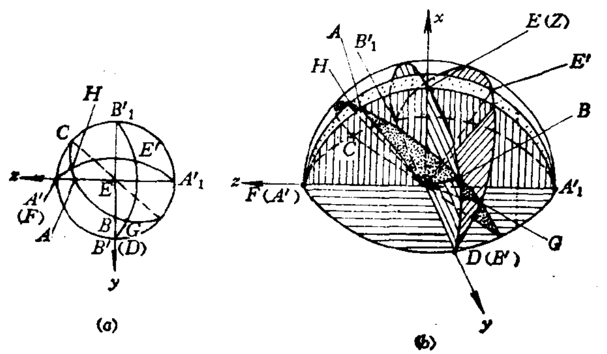


图 1-21

以就在大圆弧 $\overparen{ED}$ 和 $\overparen{EF}$ 内分别任取点 B 和 A，用以近似地表示直线 ob 和 oa。连结大圆 $\overparen{BA}$，并设 $\angle EBA=\varphi_{xy}$，$\angle EAB=\varphi_{xz}$，则大圆弧 $\overparen{BA}$ 就可以表示平面 boa 了。延长大圆弧 $\overparen{BA}$ 交大圆 $\overparen{DF}$ 于点 C，则点 C 就可用以表示直线 oc。此时，必须从适当的球面三角形中求解。例如从球面直角 $\triangle EAB$ 中（已知 $\angle BEA=90^\circ$，$\angle EBA=\varphi_{xy}$，$\angle EAB=\varphi_{xz}$）求 $\overparen{EB}$（即 $\angle eob$），$\overparen{EA}$（即 $\angle eoa$），再从球面直角 $\triangle FAC$ 中（已知 $\angle AFC=90^\circ$，$\angle FAC=\varphi_{xz}$，$\overparen{FA}=90^\circ-\overparen{EA}$）求 $\overparen{FC}$（即 $\angle foc$）、$\angle FCA$（即 φ_{xz}）。这样就得到了平面 boa 的其余各方位角。

其次谈谈在立体球面上按比例作图问题。前面讲了，这个问题需要借助于三角形 ABE 的极线三角形来完成。为了便于同图

1-21(a)对照，我们仍按它的方位作图，如图 1-21(b)。据三角形与其极线三角形的关系可知，点F、D就是$\triangle ABE$的极线三角形的两顶点，为了便于反映出对应关系，我们以A'、B'分别表示点F、D(如图)。以点A'、B'为球面圆心，并分别以φ_{xy}、φ_{xz}的补角为半径画两个小圆，相交于点E'[一]。连结大圆$A'E'$和$B'E'$，则$\triangle A'B'E'$就是$\triangle ABE$的极线三角形。取$\overset{\frown}{E'G}=\overset{\frown}{E'H}=90°$，并连结大圆$\overset{\frown}{GH}$，则此大圆就是点$E'$的极线，也就是平面$boa$之大圆的准确位置。它与大圆$\overset{\frown}{DE}$、$\overset{\frown}{FE}$、$\overset{\frown}{DF}$分别交于点$B$、$A$、$C$，则这些点就是表示直线$ob$、$oa$、$oc$之点的准确位置。假如作图是在真实的球面上进行的，就可实现图解法。

以上是直线与平面给出条件的最常见情况。有了这些常见情况的作图知识，再加上球面几何的基本知识，各种直线与平面的作图问题都不难解决。

三、空间角度计算的几种情况

前面讨论了如何依据一条直线与一个平面的两个方位角进行作图的问题，也讨论了怎样求解它的其余各方位角的问题。这种空间角度计算问题是极为简单的，用六面体法求解也不难。对于由多个直线与平面构成的复杂空间角度计算问题，我们仍可用上述方法将它们一一画在球面图上，就得到了表示各直线与平面的一系列的点与大圆，构成了一定的球面图形。

为了便于分析球面图形，再概括地总结几句：球面上的点就表示通过该点的向心直线；球面上的大圆就表示它所在的平面(简称大圆平面)；球面上一段大圆弧之长，就表示该大圆弧的两端点的两向心直线的夹角；两个大圆弧的交点，就表示该两大圆平面的交线；两个大圆相交所成的球面角，就是该两大圆平面的二面角，一个大圆被另两个大圆所截得的一段大圆弧之长，就是后两大

[一] 此时的半径大于90°，这样用圆规画小圆可能不方便。为了便于画小圆，以A'_1、B'_1为球面圆心，并分别以φ_{xy}、φ_{xz}为半径画两个小圆弧，其交点也是E'。据三角形与其极线三角形的关系，也只有图示的点E'是我们所需要的。

圆平面在前一大圆平面上的两交线的夹角；过一已知点作某一已知大圆的垂直大圆弧，其交点（垂足）的向心直线就是已知点的向心直线在已知大圆平面上的投影线，而已知点与垂足间的这段大圆弧之长，就是已知点的向心直线与已知大圆平面的夹角。

下面，我们按空间角度计算的几种情况举些例子。为了帮助我们掌握平面投影作图，这里仍在平面投影图〔（a）图〕旁画一立体图〔（b）图〕，以资对照。

1．空间两相交直线的夹角

利用球面三角解决这种问题时，首先要进行球面作图，也就是以两直线的交点为原点，将两直线分别画在球面上，得到表示两直线的两个点，通过此两点连结大圆弧，则此段大圆弧之长就是所求两直线的夹角。然后再分析球面图形，找出适当的球面三角形求解。

例一 见图1-22，已知两直线 OD 和 OF，它们在 xy 面上的投影分别为 OB 和 OE。已知$\angle COB=20°$，$\angle COE=30°$，$\angle BOD=25°$，$\angle EOF=40°$。求此两直线的夹角（$\angle DOF$）。

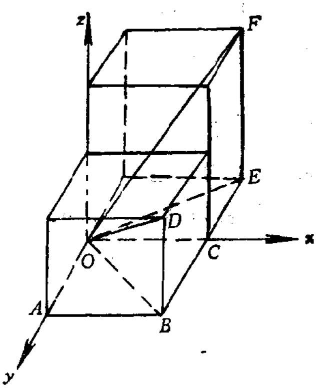
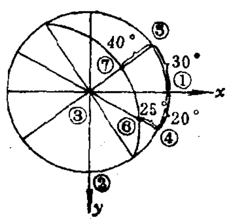


图 1-22

将坐标面 xy 置于纸面上作球面投影图（以下简称按坐标面 xy 作图），如图1-23，其中图（a）为平面投影图，图（b）为立体图。作大圆$\overset{\frown}{①②}$、$\overset{\frown}{①③}$、$\overset{\frown}{②③}$分别表示坐标面 xy、xz、yz，其交点①、②、③分别表示坐标轴 x、y、z。在大圆$\overset{\frown}{①②}$上，截取$\overset{\frown}{①④}=20°$、$\overset{\frown}{①⑤}=30°$，得表示直线 OB、OE 的点④、⑤。通过点④、⑤分别作垂直于大圆$\overset{\frown}{①②}$的两个大圆$\overset{\frown}{④③}$、$\overset{\frown}{⑤③}$。在大圆$\overset{\frown}{④③}$和$\overset{\frown}{⑤③}$上，分别截取$\overset{\frown}{④⑥}=25°$、$\overset{\frown}{⑤⑦}=40°$，得点⑥、⑦。显然点

⑥、⑦就分别表示直线 OD 和 OF。通过点⑥、⑦作大圆，则大圆弧$\overset{\frown}{⑥⑦}$就是 OD 和 OF 两直线的夹角。



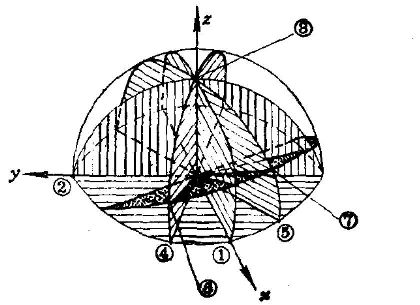


图 1-23

现在我们来分析图1-23，因为大圆$\overset{\frown}{①②}$是点③的极线，所以 ∠①③④ = $\overset{\frown}{①④}$ = 20°，∠①③⑤ = $\overset{\frown}{①⑤}$ = 30°，$\overset{\frown}{③④}$ = $\overset{\frown}{③⑤}$ = 90°。即球面三角形③⑥⑦的∠⑥③⑦和边$\overset{\frown}{③⑥}$、$\overset{\frown}{③⑦}$为已知，从而可解得边$\overset{\frown}{⑥⑦}$，也就是所求两直线的夹角。为了清楚，将△⑥⑦③取出，并命名为△ABC，如图 1-24。已知$C = 20° + 30° = 50°$，$a =$

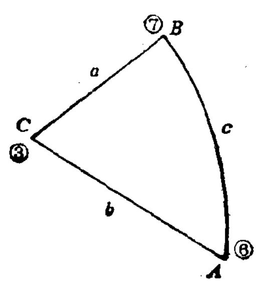


图 1-24

$90^\circ-\overset{\frown}{⑤⑦}=90^\circ-40^\circ=50^\circ$，$b=90^\circ-\overset{\frown}{④⑥}=90^\circ-25^\circ=65^\circ$，求 c

据球面三角形边的余弦定理，有：

$$\begin{aligned}\cos c &= \cos a\cos b+\sin a\sin b\cos c\\ &=\cos 50^\circ\cos 65^\circ+\sin 50^\circ\sin 65^\circ\cos 50^\circ\\ &=0.717923\end{aligned}$$

$$\therefore\qquad c=44^\circ07'$$

即直线 OD 和 OF 的夹角为 $44^\circ07'$。

2. 空间两相交平面间的角度关系

空间两相交平面间的角度关系，有其间的夹角问题，也有其交线在空间（相对于坐标系）和在该两平面上（相对于各坐标面在该面上的交线）的方位角问题。解决这种计算问题，首先要进行球面作图，即在球面图上画出表示两平面的两个大圆。这两个大圆所构成的球面角，就是所论两平面的夹角；这两个大圆的交点，就表示所论两平面的交线。很明显，这个交点在该两大圆上的位置，就表示两平面的交线在该两平面上的方位角；通过此交点作表示某坐标面的大圆的垂直大圆，则垂足的位置和垂足与该交点间的大圆弧，就表示所论两平面的交线在空间的两个方位角。

例二 见图1-25，已知平面 OAB 和 OED，它们在坐标面上的交线情况如图所示，并且已知 $\angle COA=30^\circ$，$\angle COB=40^\circ$，$\angle COE=20^\circ$，$\angle COD=55^\circ$，求此两平面的夹角及其交线在空间和在该两平面上的方位角。

我们按坐标面 xy 作球面图，如图1-26，其中图（a）为球面立体图，图（b）为球面的平面投影图。作表示坐标面 xy、xz、yz 的大圆 $\overset{\frown}{①②}$、$\overset{\frown}{①③}$、$\overset{\frown}{②③}$。取 $\overset{\frown}{①④}=30^\circ$，$\overset{\frown}{①⑤}=40^\circ$，$\overset{\frown}{①⑥}=20^\circ$，$\overset{\frown}{①⑦}=55^\circ$，得点④、⑤、⑥、⑦，这些点顺次表示直线 OA、OB、OE、OD。连结大圆 $\overset{\frown}{④⑤}$、$\overset{\frown}{⑥⑦}$，则此两大圆就分别表示平面 OAB、OED。交点⑧就表示 OAB 和 OED 两平面的交线，球面角④⑧⑥就是此两平面的夹角。而点④、⑤、⑧、⑩又分别表

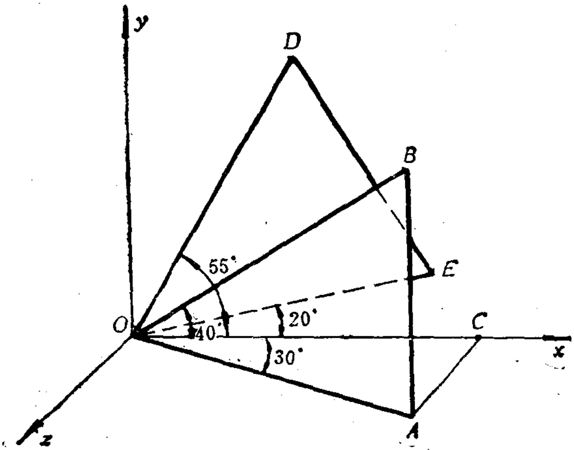
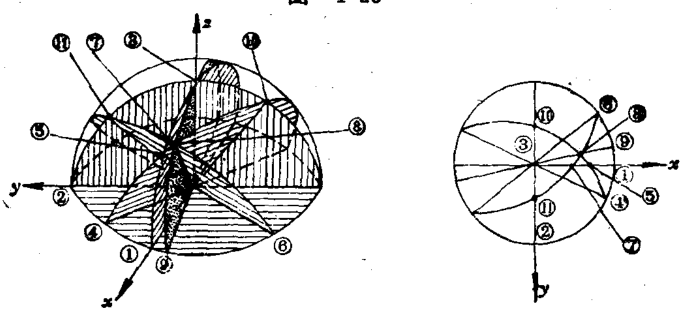


图 1-25



(a) (b)

图 1-26

示平面 xy、xz、OED、yz 各面在平面 OAB 上的交线，故大圆弧④⑤、⑤⑧、⑧⑩就是平面 OAB 上的上述各交线间的夹角。同理，大圆弧⑥⑧、⑧⑦、⑦⑪就是平面 xy、OAB、xz、yz 在平面 OED 上的交线间的夹角。通过点⑧作大圆①②的垂直大圆⑧⑨，则交点⑨（垂足）就表示 OAB 与OED的交线在平面xy 上的投影线，故大圆弧①⑨、⑨⑧就是所论两平面的交线在空间的

两个方位角。为了求解上述各角，我们通过点④、⑥分别作垂直于大圆①②的两个大圆④③、⑥③。上述各角可从△①④⑤、△①⑥⑦、△④⑥⑧、△⑩③④、△⑪③⑥和△⑨⑥⑧中逐步求出。为了清楚，将这些三角形从球面中取出，并均命名为△ABC，如图1-27。

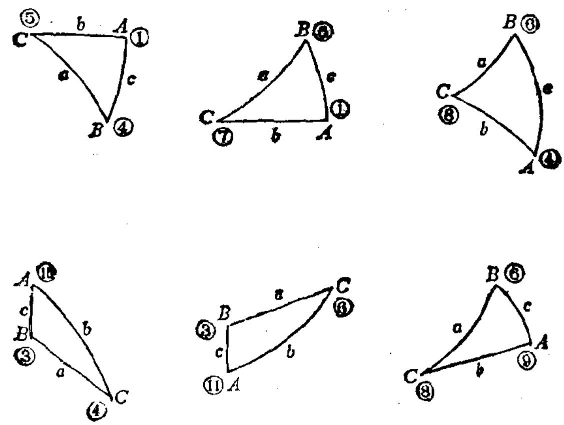


图 1-27

在△①④⑤中，已知$A=90^\circ$，$b=40^\circ$，$c=30^\circ$，求B、a。

据球面直角三角形公式1和9，有：

$$\cos a=\cos b\cos c=\cos 40^\circ\cos 30^\circ=0.663414$$

$$\operatorname{ctg}B=\operatorname{ctg}b\sin c=\operatorname{ctg}40^\circ\sin 30^\circ=0.595877$$

∴ $a=48^\circ26'20''$ ④⑤

$B=59^\circ12'40''$ ∠①④⑤

在△①⑥⑦中，已知$A=90^\circ$，$b=55^\circ$，$c=20^\circ$，求B、a。

仍据上面的公式，有：

$$\cos a=\cos b\cos c=\cos 55^\circ\cos 20^\circ=0.538986$$

$$\operatorname{ctg}B=\operatorname{ctg}b\sin c=\operatorname{ctg}55^\circ\sin 20^\circ=0.239485$$

∴ $a=57^\circ23'10''$ ⑥⑦

$B=76^\circ32'$ ∠①⑥⑦

在△④⑥⑧中，已知：$A=\angle$①④⑤$=59°12'40''$，$B=\angle$①⑥⑦$=76°32'$，$c=\overset{\frown}{①④}+\overset{\frown}{①⑥}=30°+20°=50°$，求$a$、$b$、$C$。

据球面三角形角的余弦定理的第三个公式，有：

$$\begin{aligned}\cos C&=-\cos A\cos B+\sin A\sin B\cos c\\&=-\cos 59°12'40''\cos 76°32'\\&\quad+\sin 59°12'40''\sin 76°32'\cos 50°\\&=0.417805\end{aligned}$$

据球面三角形的余切定理的第二、四个公式，有：

$$\begin{aligned}\operatorname{ctg} a&=\frac{\operatorname{ctg} A\sin B}{\sin c}+\operatorname{ctg} c\cos B\\&=\frac{\operatorname{ctg}59°12'40''\sin 76°32'}{\sin 50°}+\operatorname{ctg}50°\cos 76°32'\\&=0.951859\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{ctg} b&=\frac{\operatorname{ctg} B\sin A}{\sin c}+\operatorname{ctg} c\cos A\\&=\frac{\operatorname{ctg}76°32'\sin 59°12'40''}{\sin 50°}+\operatorname{ctg}50°\cos 59°12'40''\\&=0.698055\end{aligned}$$

∴ $C=65°18'10''$ ∠④⑧⑥

$a=46°24'50''$ $\overset{\frown}{⑥⑧}$

$b=55°05'$ $\overset{\frown}{④⑧}$

在△⑩③④中，已知$a=90°$，$B=90°+\overset{\frown}{①④}=90°+30°=120°$，$C=90°-\angle$①④⑤$=30°47'20''$，求$b$。

据球面直边三角形公式9，有：

$$\operatorname{ctg} b=\operatorname{ctg} B\sin C=\operatorname{ctg}120°\sin 30°47'20''=-0.295532$$

∴ $b=106°27'50''$ $\overset{\frown}{④⑩}$

在△⑪③⑥中，已知$a=90°$，$B=90°+\overset{\frown}{①⑥}=90°+20°=110°$，$C=90°-\angle$①⑥⑦$=13°28'$，求$b$。

仍据上面的公式，有：

$$\operatorname{ctg} b = \operatorname{ctg} B \sin C = \operatorname{ctg} 110^\circ \sin 13^\circ 28'$$
$$= -0.084761$$

∴ $$b = 94^\circ 50' 40''$$ ⑥⑪

在△⑨⑥⑧中，已知 $A = 90^\circ$ $B = \angle$①⑥⑦$= 76^\circ 32'$，$a =$ ⑥⑧$= 46^\circ 24' 50''$，求 b、c。

据球面直角三角形公式 6 和 8，有：

$$\sin b = \sin B \sin a = \sin 76^\circ 32' \sin 46^\circ 24' 50'' = 0.704424$$

$$\operatorname{tg} c = \operatorname{tg} a \cos B = \operatorname{tg} 46^\circ 24' 50'' \cos 76^\circ 32' = 0.244666$$

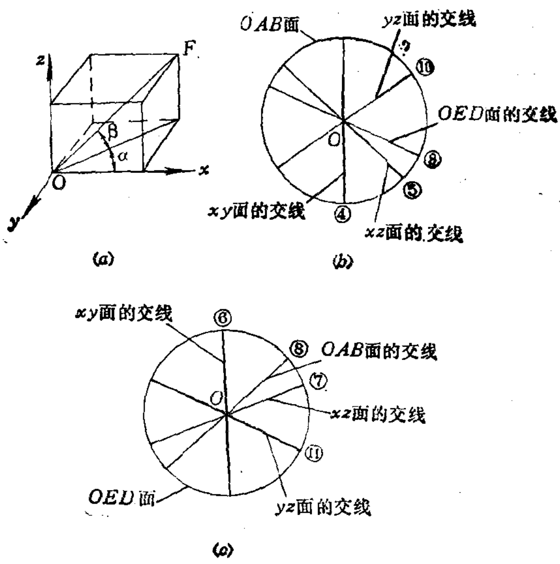
∴ $$b = 44^\circ 46'$$ ⑧⑨

$$c = 13^\circ 44' 50''$$ ⑥⑨

因为角 $B < 90^\circ$，据球面直角三角形的性质（3），角 b 应与 B 同时小于 90°，故 b 有上面唯一的解。

这个问题的全部解答为：

OAB 与 OED 两平面的夹角为 $65^\circ 18' 10''$（$\angle$④⑧⑥），此两平面的交线 OF 在空间的情况如图 1-28（a）；OED 平面在 OAB



(a) (b)

(c)

图 1-28

平面上的交线的位置如图 1-28(b) 所示；OAB 平面在 OED 平面上的交线的位置如图 1-28(c) 所示。

其中：$\alpha=\overset{\frown}{\text{①⑥}}-\overset{\frown}{\text{⑥⑨}}=20^\circ-13^\circ 44' 50''=6^\circ 15' 10''$

$\beta=\overset{\frown}{\text{⑧⑨}}=44^\circ 46'$

$\overset{\frown}{\text{④⑤}}=48^\circ 26' 20''$

$\overset{\frown}{\text{⑤⑧}}=\overset{\frown}{\text{④⑧}}-\overset{\frown}{\text{④⑤}}=55^\circ 05'-48^\circ 26' 20''=6^\circ 38' 40''$

$\overset{\frown}{\text{⑧⑩}}=\overset{\frown}{\text{④⑩}}-\overset{\frown}{\text{④⑧}}=106^\circ 27' 50''-55^\circ 05'=51^\circ 22' 50''$

$\overset{\frown}{\text{⑥⑧}}=46^\circ 24' 50''$

$\overset{\frown}{\text{⑧⑦}}=\overset{\frown}{\text{⑥⑦}}-\overset{\frown}{\text{⑥⑧}}=57^\circ 23' 10''-46^\circ 24' 50''=10^\circ 58' 20''$

$\overset{\frown}{\text{⑦⑪}}=\overset{\frown}{\text{⑥⑪}}-\overset{\frown}{\text{⑥⑦}}=94^\circ 50' 40''-57^\circ 23' 10''=37^\circ 27' 30''$

3. 空间相交的直线与平面间的角度关系

空间不平行的直线与平面间的角度关系，有其间的夹角问题，也有直线在平面上的投影线在空间和在该平面上的方位角问题。解决这种计算问题，首先要进行球面作图，即在球面上画出表示该直线的点与表示该平面的大圆。通过此点作这个大圆的垂直大圆，则垂足就表示所论直线在所论平面上的投影线。再适当连结辅助大圆弧，这个问题就可以解决了。

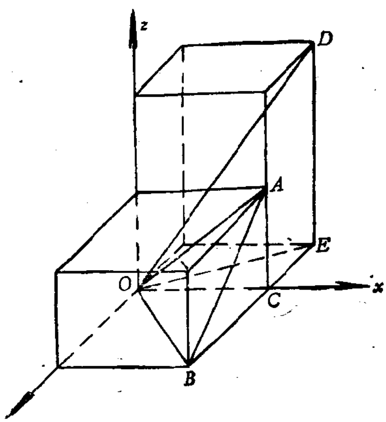
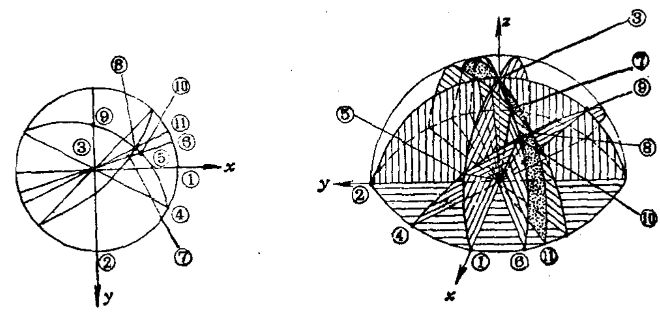


图 1-29

例三 见图1-29，已知平面 OAB，它在坐标面 xy、xz 上的交线分别为 OB、OA，且$\angle COB=35^\circ$，$\angle COA=25^\circ$。又已知直线 OD，它在坐标面 xy 上的投影线为 OE，且$\angle COE=30^\circ$，$\angle EOD=40^\circ$。求直线 OD 与平面 OAB 的夹角，及直线 OD 在平面 OAB 上的投影线在空间和在 OAB 上的方位角。

按坐标面 xy 作球面图，如图 1-30。作大圆$\overset{\frown}{①②}$、$\overset{\frown}{①③}$、$\overset{\frown}{②③}$分别表示坐标面 xy、xz、yz。点①、②、③分别表示坐标轴 x、y、z。在大圆$\overset{\frown}{①②}$上取$\overset{\frown}{①④}=35^\circ$，在大圆$\overset{\frown}{①③}$上取$\overset{\frown}{①⑤}=25^\circ$，得表示直线$OB$、$OA$的点④、⑤。连结大圆$\overset{\frown}{④⑤}$，则此大圆就表示平面 OBA。再取$\overset{\frown}{①⑥}=30^\circ$，得表示直线 OE 的点⑥。通过点⑥、③作大圆，则此大圆就表示平面 OED。在大圆$\overset{\frown}{⑥③}$上取$\overset{\frown}{⑥⑦}=40^\circ$，得点⑦，则点⑦就表示直线$OD$。通过点⑦作大圆$\overset{\frown}{⑦⑧}$，使$\angle⑦⑧⑤=90^\circ$，则垂足⑧就表示直线 OD 在平面 OBA 上的投影线。很明显，大圆弧$\overset{\frown}{⑦⑧}$就是直线 OD 与平面OBA 的夹角。点④、⑤、⑨分别是 xy、xz、yz 面在 OBA 面上的交线，点⑧是 OD线在 OBA上的投影线，故大圆弧$\overset{\frown}{④⑤}$、$\overset{\frown}{⑤⑧}$、$\overset{\frown}{⑧⑨}$就是 OBA 面上的这些线间的夹角。通过点⑧作大圆$\overset{\frown}{①②}$的垂直大圆$\overset{\frown}{⑧⑪}$，则大圆弧$\overset{\frown}{①⑪}$和⑧⑪就是 OD 在 OBA 上的投影线在空间的两个



(a) (b)

图1-30

方位角。上述这些角度可从△①④⑤、△⑥④⑩、△⑧⑦⑩、△⑨③④、△⑪④⑧中逐步求解。为了清楚，我们将这些三角形取出，并均命名为△ABC，如图 1-31。

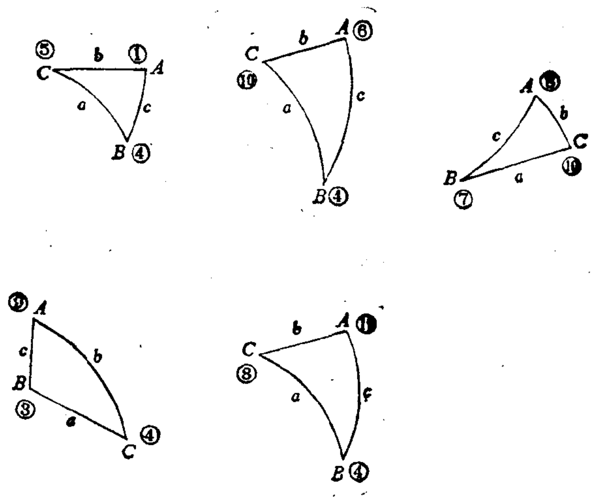


图 1-31

在△①④⑤中，已知$A=90^\circ$，$b=25^\circ$，$c=35^\circ$，求a、B。

据球面直角三角形公式 1 和 9，有：

$$\cos a=\cos b\cos c=\cos 25^\circ\cos 35^\circ=0.742404$$

$$\operatorname{ctg}B=\operatorname{ctg}b\sin c=\operatorname{ctg}25^\circ\sin 35^\circ=1.230039$$

$\therefore$ $a=42^\circ03'50''$ $\qquad \overset{\frown}{④⑤}$

$B=39^\circ06'40''$ $\qquad \angle①④⑤$

在△⑥④⑩中，已知$A=90^\circ$，$B=\angle①④⑤=39^\circ06'40''$，

$c=\overset{\frown}{①④}+\overset{\frown}{①⑥}=35^\circ+30^\circ=65^\circ$，求$C$、$a$、$b$。

据球面直角三角形公式 3、8 和 9，有：

$$\cos C=\sin B\cos c=\sin 39^\circ06'40''\cos 65^\circ=0.266599$$

$$\operatorname{ctg}a=\operatorname{ctg}c\cos B=\operatorname{ctg}65^\circ\cos 39^\circ06'40''=0.361819$$

$$\operatorname{tg}b=\operatorname{tg}B\sin c=\operatorname{tg}39^\circ06'40''\sin 65^\circ=0.736828$$

$\therefore$ $C=74^\circ32'20''$ $\qquad \angle④⑩⑥$

$a=70^\circ06'30''$ $\qquad \overset{\frown}{④⑩}$

$b=36^\circ23'$ $\qquad \overset{\frown}{⑥⑩}$

在$\triangle$⑧⑦⑩中，已知$A=90°$，$C=$④⑩⑥$=74°32'20''$，$a=\overset{\frown}{⑥⑦}-\overset{\frown}{⑥⑩}=40°-36°23'=3°37'$求$b$、$c$。

据球面直角三角形公式7和5，有：

$$\operatorname{tg} b=\operatorname{tg} a\cos c=\operatorname{tg}3°37'\cos74°32'20''=0.016850$$

$$\sin c=\sin C\sin a=\sin74°32'20''\sin3°37'=0.060798$$

$$\therefore\qquad b=0°58' \qquad \overset{\frown}{⑧⑩}$$

$$c=3°29'10'' \qquad \overset{\frown}{⑦⑧}$$

在$\triangle$⑨③④中，已知$a=90°$，$B=90°+\overset{\frown}{①④}=90°+35°=125°$，$C=90°-\angle$①④⑤$=90°-39°06'40''=50°53'20''$，求$b$。

据球面直边三角形公式9，有：

$$\operatorname{ctg} b=\operatorname{ctg} B\sin C=\operatorname{ctg}125°\sin50°53'20''=-0.543308$$

$$\therefore\qquad b=118°31' \qquad \overset{\frown}{④⑨}$$

在$\triangle$⑪④⑧中，已知$A=90°$，$a=\overset{\frown}{④⑩}+\overset{\frown}{⑧⑩}=70°06'30''+0°58'=71°04'30''$，$B=\angle$①④⑤$=39°06'40''$，求$b$、$c$。

据球面直角三角形公式6和8，有：

$$\sin b=\sin B\sin a=\sin39°06'40''\sin71°04'30''=0.596726$$

$$\operatorname{tg} c=\operatorname{tg} a\cos B=\operatorname{tg}71°04'30''\cos39°06'40''=2.263066$$

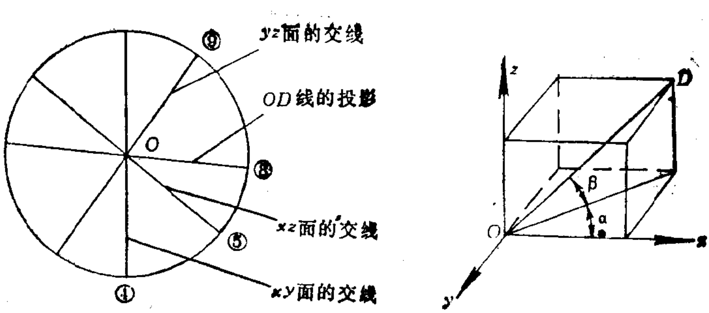
$$\therefore\qquad b=36°38'10'' \qquad \overset{\frown}{⑧⑪}$$

$$c=66°09'40'' \qquad \overset{\frown}{④⑪}$$

因为$B<90°$，据球面直角三角形的性质（3），角b应与B同时小于$90°$，故b有上面唯一的解。

这个问题的全部解答为：

直线OD与平面OBA的夹角为$3°29'10''$（$\overset{\frown}{⑦⑧}$）；直线OD在平面OBA上的投影线的位置如图1-32(a)；直线OD在平面OBA上的投影线在空间的位置如图1-32(b)。其中：



(a) (b)

图 1-32

$\overset{\frown}{\text{④⑤}}=42°03'50''$

$\overset{\frown}{\text{⑤⑧}}=\overset{\frown}{\text{④⑩}}+\overset{\frown}{\text{⑧⑩}}-\text{④⑤}=70°06'30''+0°58'$

$\quad -42°03'50''=29°0'40''$

$\overset{\frown}{\text{⑧⑨}}=\overset{\frown}{\text{④⑨}}-\overset{\frown}{\text{④⑤}}-\overset{\frown}{\text{⑤⑧}}=118°31'-42°03'50''-29°0'40''$

$\quad =71°04'30''$

$\alpha=\overset{\frown}{\text{④⑪}}-\overset{\frown}{\text{①④}}=66°09'40''-35°=31°09'40''$;

$\beta=\overset{\frown}{\text{⑧⑪}}=36°38'10''$

第二章　空间尺寸计算

空间尺寸与空间角度这两种计算问题，是交织在一起的，是相互联系的。在角度计算问题解决之后，空间尺寸计算问题就可转化为平面尺寸计算问题。这样，空间尺寸计算问题也就容易解决了。

空间尺寸计算问题，可分为点与点、点与线、点与面、线与线、线与面、面与面这六类相互间的位置计算问题。

空间两点间的相互位置问题，主要是两点间的距离问题。这个问题有了立体解析几何的两点距离公式就可以解决了，即点$A(x_A,\ y_A,\ z_A)$、$B(x_B,\ y_B,\ z_B)$间的距离d为：

$$d=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2+(z_A-z_B)^2}$$

§1　空间点与直线间的相互位置

在空间，点与直线间的相互位置问题，经常遇到的有点线距离问题；也有过点作直线的垂线，求其垂足的位置问题。这种问题可在点与直线所构成的平面上求解。其解题步骤为：

（1）点与直线上的一已知点连结线段，并求此线段长和它在空间的方位角；

（2）求所连线段与已知直线的夹角；

（3）画出所连线段与已知直线所构成的平面图，并在此图上求解。

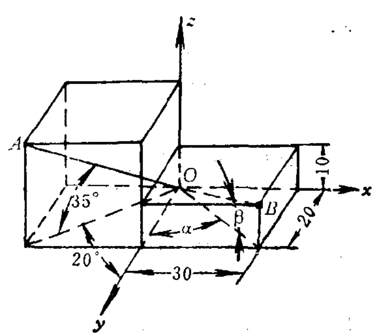


图　2－1

例　见图 2-1，已知直线OA和点B，其位置如图所示。求：

（1）点B与直线OA的距离；

（2）过点B作直线OA的垂线，求其垂足在直线OA和在空间的位置。

按上述的解题步骤求解：

首先，连结点B与直线OA上的点O（见图 2-1）。从而可求出OB的长和它的方位角α、β为：

$$OB=\sqrt{30^2+20^2+10^2}=37.417$$

$$\alpha=\text{arctg}\frac{30}{20}=\text{arctg}1.5=56°18'40''$$

$$\beta=\arcsin\frac{10}{37.417}=\arcsin 0.267258=15°30'$$

其次，利用球面三角求线段OB与直线OA的夹角。为此，按坐标面xy作球面投影图，如图 2-2。图中点A、B分别表示直线OA、OB。大圆$\overset{\frown}{AB}$就表示OA、OB两直线所构成的平面。大圆弧$\overset{\frown}{AB}$之长就是OA、OB两直线的夹角。

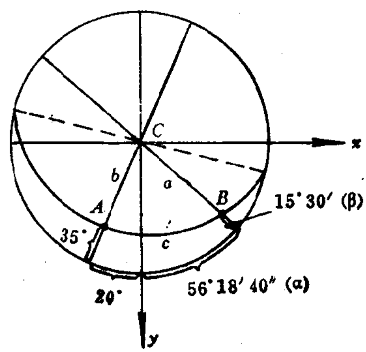


图 2-2

见图 2-2，在$\triangle ABC$中，已知$a=90°-15°30'=74°30'$，$b=90°-35°=55°$，$C=20°+56°18'40''=76°18'40''$，求$c$。

据球面三角形边的余弦定理，有：

$$\begin{aligned}\cos c&=\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos C\\&=\cos74°30'\cos55°+\sin74°30'\sin55°\cos76°18'40''\\&=0.340083\end{aligned}$$

$$\therefore \quad c=70°07'10''$$

即线段OB与直线OA的夹角为$70°07'10''$。

最后，画出线段OB与直线OA所构成的平面图，如图 2-3。通过点B作直线OA的垂线BE，则线段BE就是点B与直线

OA 的距离；线段 OE 就决定了垂足 E 在直线 OA 上的位置。从图可得：

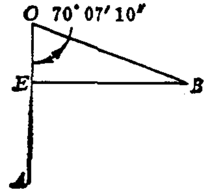


图 2-3

$$BE = OB\cdot\sin70°07'10'' = 37.417\sin70°07'10'' = 35.187$$

$$DE = OB\cdot\cos70°07'10'' = 37.417\cos70°07'10''$$
$$= 12.724$$

据线段 OE 之长，并从图 2-1 可求出点 E 在空间的位置。设 $E(x_B,\ y_E,\ z_B)$，则：

$$x_E = -OE\cdot\cos30°\sin20° = -12.724\cos35°\sin20°$$
$$= -3.565$$

$$y_B = OE\cdot\cos30°\cos20° = 12.724\cos35°\cos20° = 9.794$$

$$z_B = OE\cdot\sin30° = 12.724\sin30° = 7.298$$

本题的全部解答为：

点 B 与直线 OA 的距离为 35.187；通过点 B 作直线 OA 的垂线，其垂足 E 在 OA 上的位置由 $OE = 12.724$ 所决定；而垂足 E 在空间的位置是 E（-3.565，9.794，7.298）。

§2　空间点与平面间的相互位置

在空间，点与平面间的相互位置问题，经常遇到的有：点面距离问题；点在平面上的投影点在该平面和在空间的位置问题。这种问题可在两个平面（所论平面及通过点且垂直于所论平面的平面）上求解。其解题步骤为：

（1）连结点与平面上的一已知点，并求此线段之长和它在空间的方位角；

（2）利用球面三角，求所连线段与已知平面的夹角，并求所连线段在已知平面上的投影线在此平面和在空间的方位角；

（3）在通过所连线段且垂直于已知平面的平面上求解。

例 见图 2-4，已知平面ABC和点M，其位置如图所示。求：

（1）点M与平面ABC的距离；

（2）点M在平面ABC上的投影点的位置（包括在ABC面上的位置和在空间的位置）。

按上述的解题步骤求解：

首先，点M与平面ABC上的点C连结线段CM（见图 2-4）。从而可求出CM的长和它的方位角α、β为：

$$CM=\sqrt{(80-0)^2+(-40-0)^2+(100-50)^2}=102.470$$

$$\alpha=\operatorname{arctg}\frac{40}{80}=\operatorname{arctg}0.5=26°33'50''$$

$$\beta=\arcsin\frac{100-50}{102.470}=\arcsin0.487948=29°12'20''$$

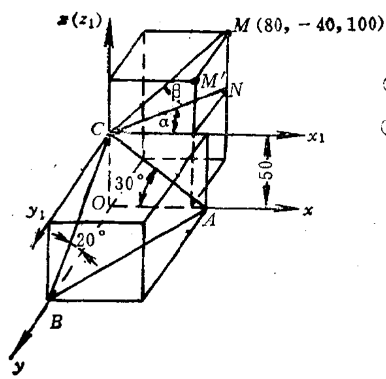


图 2-4

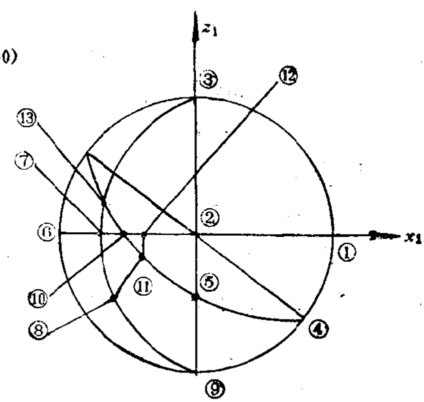


图 2-5

其次，利用球面三角，求所连线段CM与平面ABC的夹角，并求CM在ABC上的投影线的方位角。为此，以点C为原点取一新坐标系x_1、y_1、z_1（见图 2-4），并按坐标面x_1z_1作球面投影图，如图 2-5。图中点①、②、③分别表示坐标轴x_1、y_1、

z_1。取$\overset{\frown}{\text{①④}}=30^\circ$，$\overset{\frown}{\text{②⑤}}=20^\circ$，则点④、⑤就分别表示直线$CA$、$CB$。连结大圆$\overset{\frown}{\text{④⑤}}$，则大圆$\overset{\frown}{\text{④⑤}}$就表示平面$ABC$。在大圆$\overset{\frown}{\text{①②}}$上取$\overset{\frown}{\text{⑥⑦}}=26^\circ33'50''$，则点⑦就表示直线$NC$的延长线。通过点⑦、③作大圆$\overset{\frown}{\text{③⑦}}$，则此大圆就表示平面$MNC$。在大圆$\overset{\frown}{\text{③⑦}}$上取$\overset{\frown}{\text{⑦⑧}}=29^\circ12'20''$，则点⑧就表示直线$MC$的延长线。通过点⑧引大圆$\overset{\frown}{\text{④⑤}}$的垂直大圆弧$\overset{\frown}{\text{⑧⑪}}$，则大圆弧$\overset{\frown}{\text{⑧⑪}}$之长就是$MC$的延长线与平面$ABC$的夹角；点⑪就表示$MC$的延长线在平面$ABC$上的投影线。通过点⑪引大圆$\overset{\frown}{\text{①②}}$的垂直大圆弧$\overset{\frown}{\text{⑪⑫}}$，则大圆弧$\overset{\frown}{\text{②⑫}}$和$\overset{\frown}{\text{⑪⑫}}$就是上述投影线在空间的两个方位角。上述这些角度可从△⑨④⑤、△②⑤⑩、△⑦⑩⑬、△⑪⑧⑬、△⑫⑩⑪中逐步求解。为了清楚，将这些三角形取出，并均命名为△ABC，如图2-6。

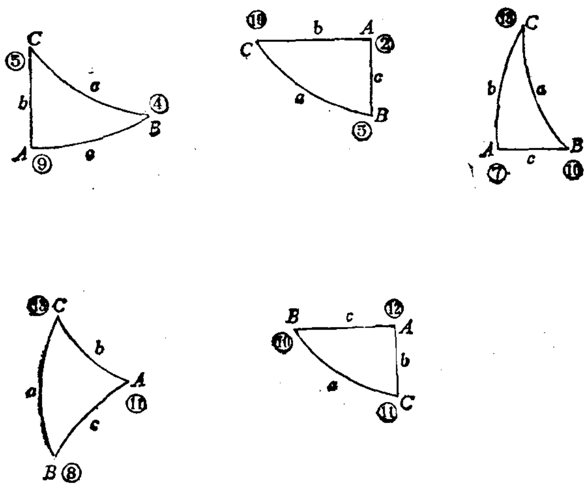


图 2-6

在△⑨④⑤中，已知$A=90^\circ$，$b=90^\circ-20^\circ=70^\circ$，$c=90^\circ-30^\circ=60^\circ$，求$C$、$a$。

据球面直角三角形公式10和1，有：

$$\mathrm{ctg}C=\mathrm{ctg}c\sin b=\mathrm{ctg}60^\circ\sin70^\circ=0.542532$$

$$\cos a=\cos b\cos c=\cos70^\circ\cos60^\circ=0.171010$$

∴ $C=61^\circ31'10''$ $\angle$④⑤⑨

$a=80^\circ09'10''$ $\overset{\frown}{④⑤}$

在△②⑤⑩中，已知$A=90^\circ$，$B=\angle$④⑤⑨$=61^\circ31'10''$，$c=\overset{\frown}{②⑤}=20^\circ$，求$C$、$a$、$b$。

据球面直角三角形公式3、8和9，有：

$$\cos C=\sin B\cos c=\sin61^\circ31'10''\cos20^\circ=0.825970$$

$$\mathrm{ctg}a=\mathrm{ctg}c\cos B=\mathrm{ctg}20^\circ\cos61^\circ31'10''=1.310163$$

$$\mathrm{tg}b=\mathrm{tg}B\sin c=\mathrm{tg}61^\circ31'10''\sin20^\circ=0.630433$$

∴ $C=34^\circ18'50''$ $\angle$②⑩⑤

$a=37^\circ21'10''$ $\overset{\frown}{⑤⑩}$

$b=32^\circ13'40''$ $\overset{\frown}{②⑩}$

在△⑦⑩⑬中，已知$A=90^\circ$，$B=\angle$②⑩⑤$=34^\circ18'50''$，$c=90^\circ-\overset{\frown}{⑥⑦}-\overset{\frown}{②⑩}=90^\circ-26^\circ33'50''-32^\circ13'40''=31^\circ12'30''$，求$C$、$a$、$b$。

据球面直角三角形公式3、8和9，有：

$$\cos C=\sin B\cos c=\sin34^\circ18'50''\cos31^\circ12'30''=0.482149$$

$$\mathrm{ctg}a=\mathrm{ctg}c\cos B=\mathrm{ctg}31^\circ12'30''\cos34^\circ18'50''=1.363377$$

$$\mathrm{tg}b=\mathrm{tg}B\sin c=\mathrm{tg}34^\circ18'50''\sin31^\circ12'30''=0.353643$$

∴ $C=61^\circ10'30''$ $\angle$⑦⑬⑩

$a=36^\circ15'30''$ $\overset{\frown}{⑩⑬}$

$b=19^\circ28'30''$ $\overset{\frown}{⑦⑬}$

在△⑪⑧⑬中，已知$A=90^\circ$，$C=\angle$⑦⑬⑩$=61^\circ10'30''$，$a=\overset{\frown}{⑦⑬}+\overset{\frown}{⑦⑧}=19^\circ28'30''+29^\circ12'20''=48^\circ40'50''$，求$b$、$c$。

据球面直角三角形公式7和5，有：

$$\mathrm{tg}b=\mathrm{tg}a\cos C=\mathrm{tg}48^\circ40'50''\cos61^\circ10'30''=0.548428$$

$$\sin c=\sin C\sin a=\sin 61^\circ 10'30''\sin 48^\circ 40'50''=0.657984$$

$$\therefore \qquad b=28^\circ 44'30'' \qquad \overset{\frown}{\text{⑪⑬}}$$

$$c=41^\circ 08'50'' \qquad \overset{\frown}{\text{⑧⑪}}$$

因为$C<90^\circ$，据球面直角三角形的性质（3），可知$c<90^\circ$，故c有上面唯一的解。

从上面的计算结果，发现大圆弧$\overset{\frown}{\text{⑩⑬}}$大于大圆弧$\overset{\frown}{\text{⑪⑬}}$，表明点⑪应在点⑩、⑬之间，相应的点⑫也应在点⑦、⑩之间，即应将图2－5更正为如图2-7所示。这样更正之后，对图2-6的前四个三角形都无影响，而最后一个△⑫⑩⑪应更正为如图2-8所示。

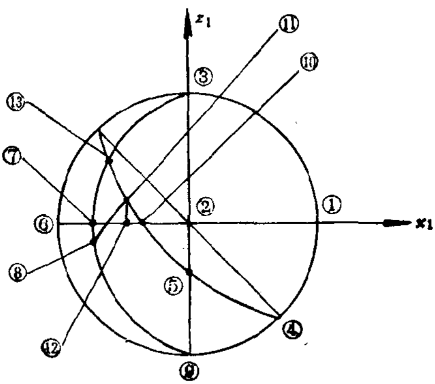


图 2-7

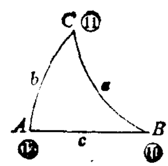


图 2-8

在△⑫⑩⑪中（图2-8），已知$A=90^\circ$，$B=\angle$②⑩⑤$=34^\circ 18'50''$，$a=\overset{\frown}{\text{⑩⑬}}-\overset{\frown}{\text{⑪⑬}}=36^\circ 15'30''-28^\circ 44'30''=7^\circ 31'$，求$b$、$c$。

据球面直角三角形公式6和8，有：

$$\sin b=\sin B\sin a=\sin 34^\circ 18'50''\sin 7^\circ 31'=0.073744$$

$$\operatorname{tg} c=\operatorname{tg} a\cos B=\operatorname{tg} 7^\circ 31'\cos 34^\circ 18'50''=0.108984$$

$$\therefore \qquad b=4^\circ 13'50'' \qquad \overset{\frown}{\text{⑪⑫}}$$

$$c=6^\circ 13'10'' \qquad \overset{\frown}{\text{⑩⑫}}$$

因为$B<90^\circ$，据球面直角三角形的性质（3），可知$b<90^\circ$，即b有上面唯一的解。

最后，我们从图2-7中将大圆弧⑧⑪及其所在的平面取出，并置于纸面上，如图 2-9 所示。前面讲了，点C是坐标系x_1、y_1、z_1的原点，即图 2-7 中的球心；点⑧的向心线是线段MC的延长线，即线段CM的位置如图所示；点⑪的向心线就是直线CM在平面ABC上的投影线。通过点M作直线CE的垂线ME，则线段EM之长就是点M到平面ABC的距离；线段CE之长及其在平面ABC上的位置，就决定了点M在平面ABC上的投影点(E)的位置。从图可得：

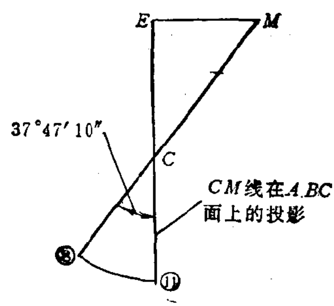


图 2-9

$$EM=CM\cdot\sin 41^\circ 08'50''=102.470\sin 41^\circ 08'50''$$
$$=67.425$$
$$CE=CM\cdot\cos 41^\circ 08'50''=102.470\cos 41^\circ 08'50''$$
$$=77.162$$

归纳前面的计算结果，得本问题的答案如下：

（1）点M与平面ABC的距离为 67.425（EM）。

（2）点M在平面ABC上的投影点E在平面ABC上相对于交线CA、CB、AB的位置，如图 2-10 所示。此图是从图 2-7 中取出的④⑤大圆平面（即平面ABC）并放在纸面上的。因为x_1z_1和xz是同一个平面，所以点④的向心线（AC）就是平面xz在平面ABC上的交线。同理，点⑤的向心线（BC）就是平面yz在平面ABC上的交线。而x_1y_1和xy是两个平行平面，所以xy面在平面ABC上的交线应平行于点⑩的向心线（x_1y_1面在ABC面上的交线）。从图 2-4 可知，$CB=50/\cos 20^\circ=53.209$，从而得知$xy$面在$ABC$面上的交线$AB$的位置如图所示。前面讲了，

点⑪的向心线是线段 MC 的延长线在平面 ABC 上的投影，即直线 CE 就是直线 CM 在平面 ABC 上的投影。取 $CE=77.162$，则点 E 就是点 M 在平面 ABC 上的投影点。

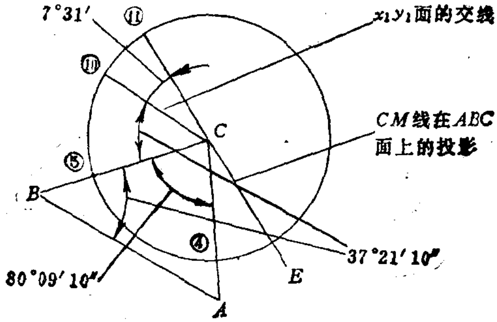


图 2-10

（3）点 M 在平面 ABC 上的投影点 E 在空间的位置如图 2-11 所示。其中直线 CF 就是图 2-7 中的点⑪。前面讲了，点⑪（即 CF）是线段 MC 的延长线在平面 ABC 上的投影线，所以线段 CM 在平面 ABC 上的投影应是线段 CE，且 $CE=77.162$。其中

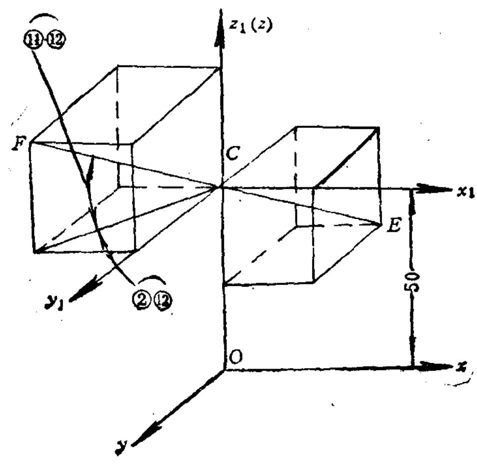


图 2-11

$\overset{\frown}{②⑫}=\overset{\frown}{②⑩}+\overset{\frown}{⑩⑫}=32°13'40''+6°13'10''=38°26'50''$，$\overset{\frown}{⑪⑫}=4°13'50''$。从图可得点$E$的坐标为：

$$x_E=CE\cdot\cos4°13'50''\sin38°26'50''=47.848;$$

$$y_E=-CE\cdot\cos4°13'50''\cos38°26'50''=-60.267;$$

$$z_E=50-CE\sin4°13'50''=44.308。$$

即点M在平面ABC上之投影点E在空间的位置为
E（47.848，－60.267，44.308）。

假如只求点到平面的距离，还可用其它途径求解。我们仍以这个问题（例2）为例，说明如何用其它途径求点M到平面ABC的距离。

首先，选取平面xz为计算基面，则点M在此基面上的投影点M'的位置是确定的，平面ABC在基面xz上的交线AC的位置也是确定的，如图2-4所示。从图2-7的球面△⑨④⑤，即图2-6（a）中，求出ABC与x_1z_1（即xz）两面的二面角(B)。据球面直角三角形公式9，有：

$$\text{ctg}B=\text{ctg}b\sin c=\text{ctg}70°\sin60°=0.315207$$

$$\therefore \qquad B=72°30'20'' \qquad \angle⑤④⑨$$

其次，将图2-4中的坐标面xz（计算基面）取出，并置于纸面上，如图2-12。从计算基面（xz）上可得点M'到直线AC的距离L为：

$$L=80\sin30°+(100-50)\cos30°=83.301$$

从Ⅰ-Ⅰ剖面（xz与ABC两面的公垂面)上可得点M到平面ABC的距离d为：

$$\begin{aligned}d&=L\sin72°30'20''-40\cos72°30'20''\\&=83.301\sin72°30'20''-40\cos72°30'20''\\&=67.423\end{aligned}$$

这里算出的点M到平面ABC的距离$d=67.423$和前面算出的点M到平面ABC的距离$ME=67.425$，只差0.002。这种差是四舍五入的积累造成的，而不是方法本身的问题。

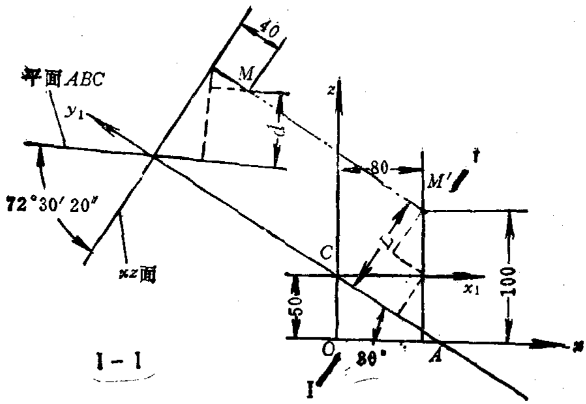


图 2-12

§3 空间两平面间的相互位置

空间两平面有相互平行与相互相交两种情况。相互平行两平面的相互位置问题，主要是求其距离，而其距离又等于一平面上的任一点到另一平面的距离，这种点面距离问题已于前面讲了。相交两平面的相互位置问题，主要是求其夹角及求其交线在各面和在空间的位置，这是本节将要讨论的。根据相交两平面各自的位置情况，可分为如下几种情形：

一、特殊平面与坐标面相交的相互位置

所谓特殊平面，系指平行于一个或两个坐标轴的平面。这种平面与某些坐标面相交，其夹角及其交线在各面和在空间的位置问题，从计算方法上看，纯属平面角度与尺寸的计算问题，这里不谈了。

二、过原点的一般两平面相交的相互位置

所谓过原点的一般平面，系指通过坐标原点又不平行于任何坐标轴的平面。这种平面相交，其夹角及其交线在各平面和在空间的位置问题，已于第一章解决了，这里不再重复。

三、空间两一般平面相交的相互位置

所谓空间一般平面，系指既不通过坐标原点又不平行于任何坐标轴的平面。这样的两个平面相交，其夹角及其交线在各面和在空间的方位角问题，可根据平移平面其角度关系不变的原理，化成情形二来解决；其交线在各面和在空间所经过的一点的位置问题，可在某坐标面上来解决。这两个问题解决了，就得到问题的全部答案。

例 见图 2-13，已知平面 DEF 和 MNP，它们在各坐标面上的交线和部分交线的方位角如图所示。求：

（1）DEF 与 MNP 两平面的夹角；

（2）DEF 与 MNP 两平面的交线在此两平面和在空间的位置。

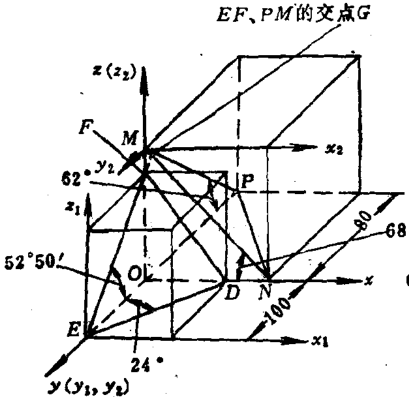


图 2-13

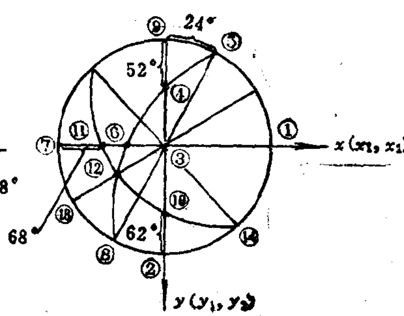


图 2-14

首先，我们求两平面的夹角及两平面的交线在此两平面和在空间的方位角。为此，取坐标系 x_1、y_1、z_1 和 x_2、y_2、z_2，如图 2-13。平移两坐标系，使其对应轴重合，并按重合后的坐标系作球面投影图，如图 2-14。图中点①、②、③分别表示坐标轴 x（即 x_1、x_2）、y（即 y_1、y_2）、z（即 z_1、z_2），点④、⑤、⑩、⑪分别表示平移至原点后的直线 EF、DE、MP、MN，大圆弧

$\overset{\frown}{④⑤}$、$\overset{\frown}{⑩⑪}$分别表示平移至原点后的平面DEF和MNP，交点⑫就是平移后的两平面的交线。通过点③、⑫作大圆，交大圆$\overset{\frown}{①②}$于点⑬，则点⑬就是平移后两平面的交线在坐标xy上的投影线。很明显，球面角⑥⑫⑪就是两平面DEF与MNP的夹角；大圆弧$\overset{\frown}{⑤④}$、$\overset{\frown}{④⑥}$、$\overset{\frown}{⑥⑫}$就是平面xy、yz、xz、MNP在平面DEF上之各交线间的夹角；大圆弧$\overset{\frown}{⑭⑩}$、$\overset{\frown}{⑩⑫}$、$\overset{\frown}{⑫⑪}$就是平面xy、yz、DEF、xz在平面MNP上之各交线间的夹角；大圆弧$\overset{\frown}{⑦⑬}$、$\overset{\frown}{⑬⑫}$就是两平面的交线在空间的方位角。这些角度可从△⑨④⑤、△③④⑥、△③⑩⑪、△②⑩⑭、△⑥⑪⑫、△③⑪⑫中逐步求解。将这些三角形取出，并均命名为△ABC，如图 2-15。

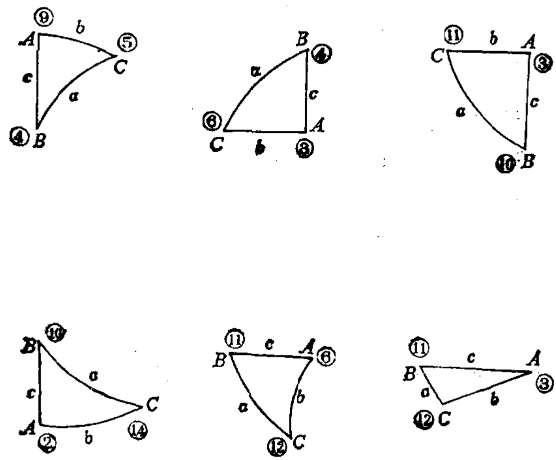


图 2-15

在△⑨④⑤中，已知$A=90^\circ$，$b=24^\circ$，$c=52^\circ$，求B、a。据球直角三角形公式 9 和 1，有：

$$\mathrm{ctg}B=\mathrm{ctg}b\sin c=\mathrm{ctg}24^\circ\sin52^\circ=1.769901$$

$$\cos a=\cos b\cos c=\cos24^\circ\cos52^\circ=0.562435$$

$\therefore$ $$B=29^\circ28' \qquad \angle⑤④⑨$$

$a=55^\circ46'30''$ $\qquad\overset{\frown}{\text{④⑤}}$

在△③④⑥中，已知$A=90^\circ$，$B=\angle$⑤④⑨$=29^\circ28'$，$c=90^\circ-52^\circ=38^\circ$，求$C$、$a$、$b$。

据球面直角三角形公式3、8和9，有：

$$\cos C=\sin B\cos c=\sin29^\circ28'\cos38^\circ=0.387636$$

$$\mathrm{ctg}\,a=\mathrm{ctg}\,c\cos B=\mathrm{ctg}38^\circ\cos29^\circ28'=1.114371$$

$$\mathrm{tg}\,b=\mathrm{tg}B\sin c=\mathrm{tg}29^\circ28'\sin38^\circ=0.347852$$

∴ $C=67^\circ11'30''$ $\qquad\angle$③⑥④

$a=41^\circ54'10''$ $\qquad\overset{\frown}{\text{④⑥}}$

$b=19^\circ10'50''$ $\qquad\overset{\frown}{\text{③⑥}}$

在△③⑩⑪中，已知$A=90^\circ$，$b=90^\circ-68^\circ=22^\circ$，$c=90^\circ-62^\circ=28^\circ$，求$B$、$C$、$a$。

据球面直角三角形公式9、10和1，有：

$$\mathrm{ctg}B=\mathrm{ctg}\,b\sin c=\mathrm{ctg}22^\circ\sin28^\circ=1.161983$$

$$\mathrm{ctg}C=\mathrm{ctg}\,c\sin b=\mathrm{ctg}28^\circ\sin22^\circ=0.704533$$

$$\cos a=\cos b\cos c=\cos22^\circ\cos28^\circ=0.818655$$

∴ $B=40^\circ43'$ $\qquad\angle$③⑩⑪

$C=54^\circ50'$ $\qquad\angle$③⑪⑩

$a=35^\circ03'$ $\qquad\overset{\frown}{\text{⑩⑪}}$

在△②⑩⑭中，已知$A=90^\circ$，$B=\angle$③⑩⑪$=40^\circ43'$，$c=62^\circ$，求a。

据球面直角三角形公式8，有：

$$\mathrm{ctg}\,a=\mathrm{ctg}\,c\cos B=\mathrm{ctg}62^\circ\cos40^\circ43'=0.403006$$

∴ $a=68^\circ03'$ $\qquad\overset{\frown}{\text{⑩⑭}}$

在△⑥⑪⑫中，已知$A=\angle$③⑥④$=67^\circ11'30''$，$B=\angle$③⑪⑩$=54^\circ50'$，$c=90^\circ-68^\circ-\overset{\frown}{\text{③⑥}}=22^\circ-19^\circ10'50''=2^\circ49'10''$，求$c$、$a$、$b$。

据球面三角形角的余弦定理的第三个公式，有：

$$\cos C=-\cos A\cos B+\sin A\sin B\cos C$$
$$=-\cos 67^\circ 11' 30''\cos 54^\circ 50'$$
$$+\sin 67^\circ 11' 30''\sin 54^\circ 50'\cos 2^\circ 49' 10''$$
$$=0.529377$$

$\therefore$ $$C=58^\circ 02' 10'' \qquad \angle ⑥⑫⑪$$

又据余切定理的第二、四个公式，有：

$$\operatorname{ctg} a=\frac{\operatorname{ctg} A\sin B}{\sin c}+\operatorname{ctg} c\cos B$$
$$=\frac{\operatorname{ctg} 67^\circ 11' 30''\sin 54^\circ 50'}{\sin 2^\circ 49' 10''}+\operatorname{ctg} 2^\circ 49' 10''\cos 54^\circ 50'$$
$$=18.683884$$

$$\operatorname{ctg} b=\frac{\operatorname{ctg} B\sin A}{\sin c}+\operatorname{ctg} c\cos A$$
$$=\frac{\operatorname{ctg} 54^\circ 50'\sin 67^\circ 11' 30''}{\sin 2^\circ 49' 10''}+\operatorname{ctg} 2^\circ 49' 10''\cos 67^\circ 11' 30''$$
$$=21.074761$$

$\therefore$ $$a=3^\circ 03' 50'' \qquad \overset{\frown}{⑪⑫}$$
$$b=2^\circ 43' \qquad \overset{\frown}{⑥⑫}$$

在△③⑪⑫中，已知 $a=\overset{\frown}{⑪⑫}=3^\circ 03' 50''$， $c=90^\circ-68^\circ=22^\circ$， $B=\angle ③⑪⑩=54^\circ 50'$， A、 b。

据余切定理的第二个公式，有：

$$\operatorname{ctg} A=\frac{\operatorname{ctg} a\sin c}{\sin B}-\cos c\operatorname{ctg} B$$
$$=\frac{\operatorname{ctg} 3^\circ 03' 50''\sin 22^\circ}{\sin 54^\circ 50'}-\cos 22^\circ\operatorname{ctg} 54^\circ 50'$$
$$=7.907931$$

$\therefore$ $$A=7^\circ 12' 30'' \qquad \angle ⑪③⑫$$

又据边的余弦定理的第二个公式，有：

$$\cos b=\cos a\cos c+\sin a\sin c\cos B$$
$$=\cos 3^\circ 03' 50''\cos 22^\circ$$
$$+\sin 3^\circ 03' 50''\sin 22^\circ\cos 54^\circ 50'$$
$$=0.937391$$

$$\therefore \qquad b=20^\circ 23' \qquad \overset{\frown}{③⑫}$$

其次，我们求 DEF 和 MNP 两平面的交线上的一点在空间和在此两平面上的位置。这个问题解决了，就得到了问题全部答案。为此，我们再看图 2-13，在坐标面 yz 上，延长 EF 交直线 PM 于点 G，则点 G 就是 DEF 与 MNP 两平面的交线上的一点。如果求出点 G 在空间和在 DEF、MNP 两平面上的位置，则所论交线的位置就确定了。

见图 2-13，在平面三角形 EGP 中，已知 $EP=100+80=180$，$\angle PEG=52^\circ$，$\angle EPG=62^\circ$。据平面三角形的正弦定理，得：

$$EG=EP\cdot\frac{\sin(\angle EPG)}{\sin(\angle EGP)}=180\cdot\frac{\sin 62^\circ}{\sin(180^\circ-52^\circ-62^\circ)}$$
$$=173.972$$

$$PG=EP\cdot\frac{\sin(\angle PEG)}{\sin(\angle EGP)}=180\cdot\frac{\sin 52^\circ}{\sin(180^\circ-52^\circ-62^\circ)}$$
$$=155.265$$

设点 G 的坐标为 G $(x_G,\ y_G,\ z_G)$，从图 2-13 可得：

$x_G=0$

$y_G=100-EG\cos 52^\circ=100-173.972\cos 52^\circ=-7.108$

$z_G=EG\sin 52^\circ=173.972\sin 52^\circ=137.091$

为了确定 DE、EF、DF 三直线的相互位置，及 MN、MP、NP 三直线的相互位置，我们再求 EF 和 MP 两线段之长。从图 2-13 得：

$$EF=\frac{100}{\cos 52^\circ}=162.427$$

$$MP=\frac{80}{\cos 62^\circ}=170.404$$

本问题的全部答案为：

（1）DEF 与 MNP 两平面的夹角为 $58^\circ 02'10''$（$\angle$⑥⑫⑪）；

（2）DEF 与 MNP 两平面的交线 GH，在 DEF 和 MNP 两平面上的位置分别见图 2-16（b）和（d）；在空间的位置见

图 2-16（e）。图中，（a）与（b）的各相应直线平行；（c）与（d）的各相应直线平行。

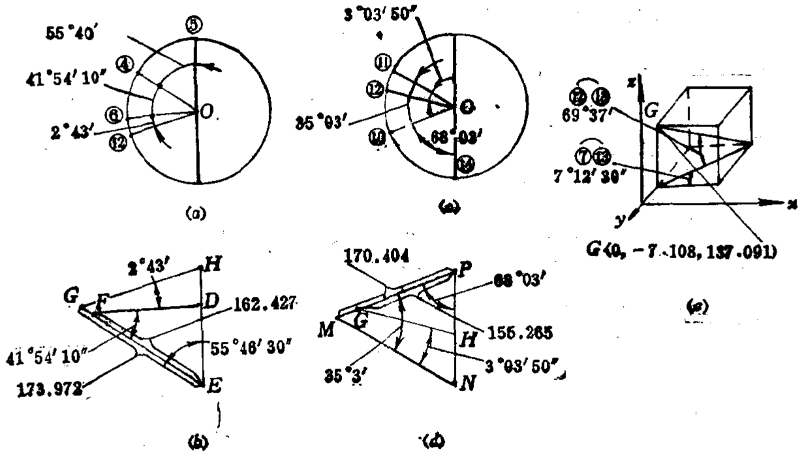


图 2-16

§4 空间直线与平面间的相互位置

空间直线与平面之间有以下两种情况：

一、空间直线与平面平行时的相互位置

空间直线与平面平行时，其间的相互位置关系，主要是其间的距离及直线在平面上的投影线的位置问题。这种问题有前面的点面距离和点在平面上的投影的位置问题以后，就可以解决了。

二、空间直线与平面相交时的相互位置

空间直线与平面相交时，其间的相互位置问题，主要有其间的夹角、交点的位置和直线在平面上的投影线的位置等三个问题。这种问题可在两个平面（所论平面及通过直线且垂直于所论平面的平面）上求解。其解题步骤为：

（1）过已知直线作垂直于已知平面的平面，利用球面三角求已知直线、已知平面与所作平面间的角度关系；

（2）求已知直线上的某一点在已知平面上的投影点的位置，并求其间的距离；

（3）在已知平面和所作平面上求解。

例 见图 2-17，已知直线 MN 和平面 DEF，求：

（1）直线 MN 与平面 DEF 的夹角；

（2）直线 MN 在平面 DEF 上之投影线的位置；

（3）直线 MN 与平面 DEF 之交点在空间和在已知直线、已知平面上的位置。

按上述的解题步骤求解：

首先，在图 2-17 中取坐标系 x_1、y_1、z_1 和 x_2、y_2、z_2。平移两坐标系，使其对应轴重合，并按重合后的坐标系作球面投影图，如图 2-18。图中点①、②、③分别表示坐标轴 x（即 x_1、x_2）、y

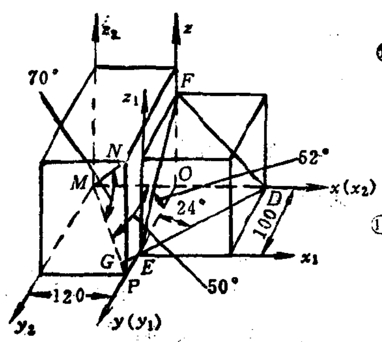


图 2-17

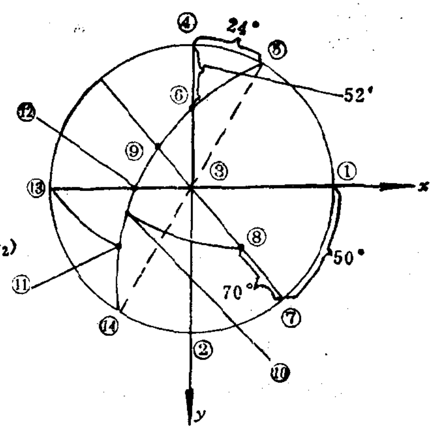


图 2-18

（即 y_1、y_2）、z（即 z_1、z_2），点⑤、⑥、⑦、⑧、⑬分别表示平移后的直线 ED、EF、MP、MN、DM，大圆弧$\widehat{⑤⑥}$就表示平移后的平面 DEF。通过点⑧、⑬分别作垂直于大圆$\widehat{⑤⑥}$的两个大圆弧$\widehat{⑧⑩}$和$\widehat{⑬⑪}$，则点⑩、⑪就分别表示平移后的直线 MN、DM 在平面 DEF 上的投影线，大圆弧$\widehat{⑧⑩}$、$\widehat{⑬⑪}$就分别表示直线 MN、DM 与平面 DEF 的夹角。而大圆弧$\widehat{⑤⑥}$、$\widehat{⑥⑫}$、$\widehat{⑫⑩}$、$\widehat{⑩⑪}$，就表示平面 DEF 上的各坐标面交线及 MN、DM 的投影

线间的角度关系。这些角度可从△④⑤⑥、△③⑫⑥、△③⑨⑥、△⑩⑨⑧和△⑪⑭⑬中逐步求解。将这些三角形取出，并均命名为△ABC，如图 2-19。

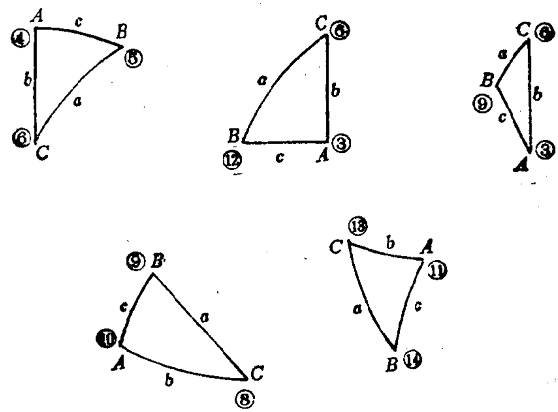


图 2-19

在△④⑤⑥中，已知 $A=90^\circ$，$b=52^\circ$，$c=24^\circ$，求 a、B、C。

据球面直角三角形公式 1 、 9 、10，有：

$$\cos a=\cos b\cos c=\cos 52^\circ\cos 24^\circ$$

$$\operatorname{tg}B=\frac{\operatorname{tg}b}{\sin c}=\frac{\operatorname{tg}52^\circ}{\sin 24^\circ}$$

$$\operatorname{tg}C=\frac{\operatorname{tg}c}{\sin b}=\frac{\operatorname{tg}24^\circ}{\sin 52^\circ}$$

$$a=55^\circ 46'30'' \qquad \overset{\frown}{\text{⑤⑥}}$$

$$B=72^\circ 22'20'' \qquad \angle\text{④⑤⑥}$$

$$C=29^\circ 28' \qquad \angle\text{④⑥⑤}$$

在△③⑫⑥中，已知 $A=90^\circ$，$C=\angle$④⑥⑤$=29^\circ 28'$，$b=90^\circ-\overset{\frown}{\text{④⑥}}=38^\circ$，求 a、c、B。

据球面直角三角形公式 7 、10 和 2 ，有：

$$\operatorname{tg}a=\frac{\operatorname{tg}b}{\cos C}=\frac{\operatorname{tg}38^\circ}{\cos 29^\circ 28'}$$

$$\operatorname{tg} c=\operatorname{tg} C \sin b=\operatorname{tg} 29^\circ 28' \sin 38^\circ$$

$$\cos B=\sin C \cos b=\sin 29^\circ 28' \cos 38^\circ$$

∴ $a=41^\circ 54' 10''$ ⑥⑫

$c=19^\circ 10' 50''$ ③⑫

$B=67^\circ 11' 30''$ ∠③⑫⑥

在△③⑨⑥中，已知 $A=90^\circ-$①⑦$=40^\circ$， $b=90^\circ-$④⑥$=38^\circ$， $C=$∠④⑥⑤$=29^\circ 28'$，求 a、c、B。

据余切定理的第一、第六个公式，有：

$$\operatorname{ctg} a=\frac{\operatorname{ctg} A \sin C}{\sin b}+\operatorname{ctg} b \cos C$$

$$=\frac{\operatorname{ctg} 40^\circ \sin 29^\circ 28'}{\sin 38^\circ}+\operatorname{ctg} 38^\circ \cos 29^\circ 28'$$

$$=2.066589$$

$$\operatorname{ctg} c=\frac{\operatorname{ctg} C \sin A}{\sin b}+\operatorname{ctg} b \cos A$$

$$=\frac{\operatorname{ctg} 29^\circ 28' \sin 40^\circ}{\sin 38^\circ}+\operatorname{ctg} 38^\circ \cos 40^\circ$$

$$=2.828370$$

∴ $a=25^\circ 49' 20''$ ⑥⑨

$c=19^\circ 28' 20''$ ③⑨

据角的余弦定理的第二个公式，有：

$$\cos B=-\cos A \cos C+\sin A \sin C \cos b$$

$$=-\cos 40^\circ \cos 29^\circ 28'+\sin 40^\circ \sin 29^\circ 28' \cos 38^\circ$$

$$=-0.417783$$

∴ $B=114^\circ 41' 40''$ ∠③⑨⑥

在△⑩⑨⑧中，已知 $A=90^\circ$， $B=180^\circ-$∠③⑨⑥$=65^\circ 18' 20''$，$a=$⑦③$+$③⑨$-$⑦⑧$=39^\circ 28' 20''$，求 b、c。

据球面直角三角形公式 6 和 8，有：

$$\sin b=\sin B \sin a=\sin 65^\circ 18' 20'' \sin 39^\circ 28' 20''=0.577568$$

$$\operatorname{tg} c=\operatorname{tg} a \cos B=\operatorname{tg} 39^\circ 28' 20'' \cos 65^\circ 18' 20''=0.344050$$

∴ $b=35^\circ 16' 50''$ ⑧⑩

$$c=18°59'10'' \qquad \overset{\frown}{⑨⑩}$$

据球面直角三角形的性质（3），因为$B<90°$，所以b必小于90°，故b有上面唯一的解。

在△⑪⑭⑬中，已知$A=90°$，$a=90°-\overset{\frown}{②⑭}=66°$，$B=\angle$④⑤⑥$=72°22'20''$；求$b$、$c$。

据球面直角三角形公式6和8，有：

$$\sin b=\sin B\sin a=\sin 72°22'20''\sin 66°=0.870649$$

$$\operatorname{tg} c=\operatorname{tg} a\cos B=\operatorname{tg} 66°\cos 72°22'20''=0.680172$$

$$\therefore \qquad b=60°32' \qquad \overset{\frown}{⑪⑬}$$

$$c=34°13'20'' \qquad \overset{\frown}{⑪⑭}$$

其次，我们求直线MN上的点M在平面DEF上的投影点的位置，并求点M与平面DEF间的距离。见图2-17，直线DM在平面DEF上的投影线必通过平面DEF上的点D，而点M在平面DEF上的投影点（M'），必在DM的投影线上。因为DM之长和它与平面DEF的夹角都已知道，所以点M至平面DEF的距离（MM'）和表示点M'位置的线段DM'都可求出。从图2-17得：

$$DE=\frac{100}{\cos 24°}=109.464$$

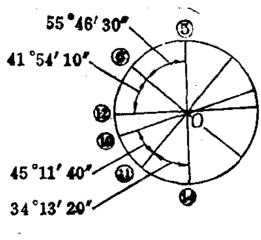
$$MM'=DM\cdot\sin(\overset{\frown}{⑪⑬})=(120+100\operatorname{tg}24°)\sin 60°32'$$
$$=143.241$$

$$DM'=DM\cdot\cos(\overset{\frown}{⑪⑬})=(120+100\operatorname{tg}24°)\cos 60°32'$$
$$=80.932$$

为了能够将点M'在平面DEF上的位置表达清楚，我们从图2-18中将大圆$\overset{\frown}{⑤⑥⑫}$取出，并置于纸面上，如图2-20。其中，图（a）就将平面DEF上的各坐标面交线及DM、MN的投影线间的角度关系表达清楚了；而图（b）就是这些线间的真实位置。图中

$$\overset{\frown}{⑩⑪}=180°-\overset{\frown}{⑤⑥}-\overset{\frown}{⑥⑨}-\overset{\frown}{⑨⑩}-\overset{\frown}{⑪⑭}=45°11'40''$$

见图 2-20(b) 所示的 DEF 平面。显然，直线 MN 在这个平面上的投影 $M'N'$ 应通过点 M'，而直线 MN 与平面 DEF



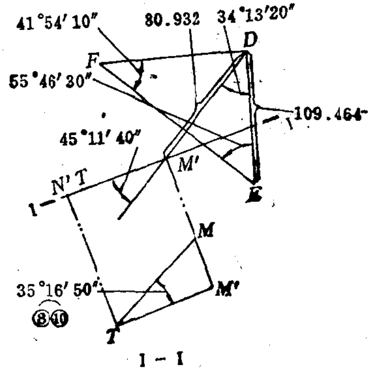


图 2-20

的交点 T 应在 $M'N'$ 上。过 $M'N'$ 作剖面 I-I，如图示。则此剖面就是通过 MN 且垂直于 DEF 的平面。因为 MM' 及 MN 与 DEF 的夹角 ($\overset{\frown}{⑧⑩}$) 已经求出，故表示交点 T 在平面 DEF 和在直线 MN 上的位置的线段 $M'T$、MT 都可求出，即：

$$TM' = MM'\operatorname{ctg}(\overset{\frown}{⑧⑩}) = 143.241\operatorname{ctg}35°16'50''$$
$$= 202.452$$

$$MT = \frac{MM'}{\sin(\overset{\frown}{⑧⑩})} = \frac{143.241}{\sin 35°16'50''} = 248.002$$

现在，从图 2-17 就可求出点 T 的坐标了，即

$$x_T = -(120 - MT\cos 70°\cos 50°)$$
$$= -(120 - 248.002\cos 70°\cos 50°)$$
$$= -65.478$$

$$y_T = MT\cos 70°\sin 50°$$
$$= 248.002\cos 70°\sin 50° = 64.977$$

$$z_T = MT\sin 70° = 248.002\sin 70° = 233.046$$

本题的全部解答为：

（1）直线 MN 与平面 DEF 的夹角为 $35°16'50''$；

（2）直线 MN 在平面 DEF 的投影为 $M'N'$〔见图 2-20（b）〕；

（3）直线 MN 与平面 DEF 之交点 T 在这直线与平面上的位置见图 2-20（b），交点 T 在空间位置为：$T(-65.478, 64.977, 233.046)$。

§5 空间两直线间的相互位置

空间两直线间有平行、相交、交叉三种情况。前两种情况的相互位置问题，分别是其间的距离与夹角、交点问题，已在前面解决了。本节只讨论空间两交叉直线间的相互位置问题。

空间两交叉直线，就是既不平行又不相交的两直线。这样两条直线间的相互位置问题，主要是求其夹角（两直线平移至相交后的夹角）、公垂线段长（两直线间的距离）及公垂线段的两垂足的位置问题。对这种问题，可通过一直线作平行于另一直线的平面，再从另一直线与所作平面之间的位置关系中求解。其解题步骤为：

（1）过一直线作平行于另一直线的平面，利用球面三角求两直线在所作平面上的投影线间的角度关系。

（2）求另一直线（不与所作平面重合的直线）上的某一点在所作平面上的投影点的位置，及该点至面的距离。

（3）在所作平面上求解。

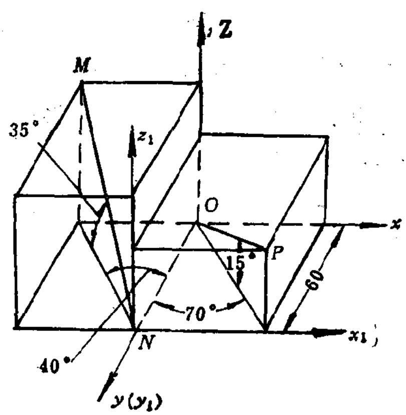


图 2-21

例 见图2-21，已知直线 OP 与 MN，求：

（1）两直线间的夹角；

（2）两直线间的距离，即其公垂线段长；

（3）公垂线段的两垂足在两直线上及在空间的位置。

按上述的解题步骤求解：

见图 2-21，首先，对直线 MN 另取一坐标系 x_1、y_1、z_1，并平移后一坐标系，使之与原坐标系重合。再按坐标系 x（即 x_1）、y（即 y_1）、z（即 z_1）作球面投影图，如图 2-22。图中，点①、②、③分别表示坐标轴 x、y、z，点⑤就表示直线 OP，而点⑧就表示平移后的直线 MN，大圆弧$\overset{\frown}{⑤⑧}$就是通过 OP 且平行于 MN 的平面。过点⑥作大圆$\overset{\frown}{⑤⑧}$的垂直大圆弧$\overset{\frown}{⑥⑨}$，则垂足⑨就表示直线 NO 在$\overset{\frown}{⑤⑧}$大圆平面上的投影线，大圆弧$\overset{\frown}{⑥⑨}$就是直线 NO 与$\overset{\frown}{⑤⑧}$大圆平面的夹角。很明显，大圆弧$\overset{\frown}{⑩⑧}$、$\overset{\frown}{⑧⑨}$、$\overset{\frown}{⑧⑤}$就表达了 NO、MN、OP 各直线在$\overset{\frown}{⑤⑧}$大圆平面上的投影线间的角度关系。这些大圆弧可从△③⑤⑧、△⑦⑧⑩和△⑨⑥⑩中逐步求解。将这些三角形取出，并均命名为△ABC，如图 2-23。

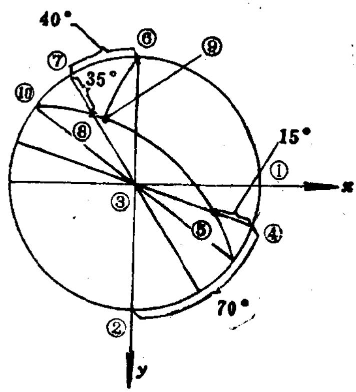


图 2-22

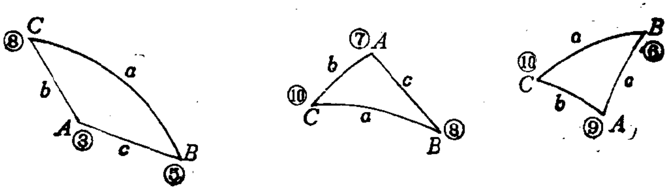


图 2-23

在△③⑤⑧中，已知$A=180°-\overset{\frown}{②④}+\overset{\frown}{⑥⑦}=150°$，$b=\overset{\frown}{③⑦}-\overset{\frown}{⑦⑧}=55°$，$c=\overset{\frown}{③④}-\overset{\frown}{④⑤}=75°$，求$a$、$c$。

据边的余弦定理的第一个公式，有：

$$\begin{aligned}\cos a&=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A\\&=\cos55°\cos75°+\sin55°\sin75°\cos150°\\&=-0.536782\end{aligned}$$

据余切定理的第6个公式，有：

$$\begin{aligned}\operatorname{ctg}C&=\frac{\operatorname{ctg}c\sin b}{\sin A}-\cos b\operatorname{ctg}A\\&=\frac{\operatorname{ctg}75°\sin55°}{\sin150°}-\cos55°\operatorname{ctg}150°\\&=1.432446\end{aligned}$$

∴ $a=122°27'50''$ $\qquad\overset{\frown}{⑤⑧}$

$C=34°55'10''$ $\qquad\angle③⑧⑤$

在△⑦⑧⑩中，已知$A=90°$，$B=\angle③⑧⑤=34°55'10''$，$c=\overset{\frown}{⑦⑧}=35°$，求$C$、$b$、$a$。

据球直角三角形公式3、9和8，有：

$$\cos C=\sin B\cos c=\sin34°55'10''\cos35°=0.468902$$

$$\operatorname{tg}b=\operatorname{tg}B\sin c=\operatorname{tg}34°55'10''\sin35°=0.400422$$

$$\operatorname{tg}a=\frac{\operatorname{tg}c}{\cos B}=\frac{\operatorname{tg}35°}{\cos34°55'10''}=0.853956$$

∴ $c=62°02'10''$ $\qquad\angle⑦⑩⑧$

$b=21°49'20''$ $\qquad\overset{\frown}{⑦⑩}$

$a=40°29'50''$ $\qquad\overset{\frown}{⑧⑩}$

在△⑨⑥⑩中，已知$A=90°$，$C=\angle⑦⑩⑧=62°02'10''$，$a=\overset{\frown}{⑥⑦}+\overset{\frown}{⑦⑩}=61°49'20''$，求$b$、$c$。

据球面直角三角形公式7和5，有：

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}b&=\operatorname{tg}a\cos C\\&=\operatorname{tg}61°49'20''\cos62°02'10''\\&=0.875338\end{aligned}$$

$$\sin c=\sin C\sin a$$
$$=\sin 62^{\circ}02'10''\sin 61^{\circ}49'20''$$
$$=0.778567$$

$\therefore$ $$b=41^{\circ}11'50'' \qquad \overset{\frown}{⑨⑩}$$

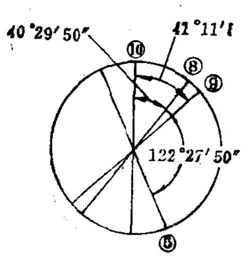
$$c=51^{\circ}07'50'' \qquad \overset{\frown}{⑥⑨}$$

其次，求直线 MN 上的一点 N 在所作平面（$\overset{\frown}{⑤⑧}$大圆平面）上的投影点的位置，并求点 N 与这平面的距离。由图 2-21 可见，直线 NO 在所作平面上的投影线，必经过所作平面上的点 O，而点 N 在这个平面上的投影点（N'），必在 NO 的投影线上。因为 NO 之长和它与所作平面的夹角都已求出，所以点 N 至这平面的距离（NN'）和表示点 N' 位置的线段 ON' 都可求出。从图可得：

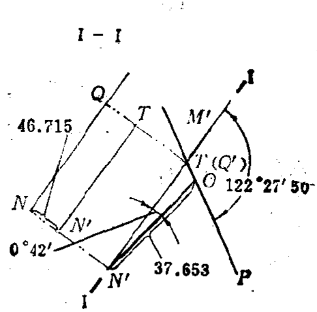
$$NN'=ON\cdot\sin(\overset{\frown}{⑥⑨})=60\sin 51^{\circ}07'50''=46.715$$

$$ON'=ON\cdot\cos(\overset{\frown}{⑥⑨})=60\cos 51^{\circ}07'50''=37.653$$

为了能将点 N' 在所作平面上的位置表达清楚，我们从图2-22中将大圆$\overset{\frown}{⑤⑧⑩}$取出，并放在纸面上，如图2-24。其中图（a）就将所作平面上的 ON、MN、OP 各直线之投影线间的角度关系表达清楚了，而图（b）就是这些投影线间的真实位置。



(a)



(b)

图 2-24

最后，见图 2-24(b)，显然直线 MN 在此平面上的投影线 $M'N'$ 应经过点 N'。过 $M'N'$ 作剖面 I－I，则 MN、OP 两直线的公垂线就是线段 QT，表示垂足 T、Q 分别在直线 OP、MN 上的位置的线段 OT、NQ 都可求出。从图得：

$$\angle OTN' = 180^\circ - 122^\circ 27' 50'' = 57^\circ 32' 10''$$

$$\angle TON' = 180^\circ - 57^\circ 32' 10'' - 0^\circ 42' = 121^\circ 45' 50''$$

据平面三角形的正弦定理得：

$$NQ = N'T = \frac{37.653}{\sin 57^\circ 32' 10''} \sin 121^\circ 45' 50''$$

$$= 37.943$$

$$OT = \frac{37.653}{\sin 57^\circ 32' 10''} \sin 0^\circ 42' = 0.545$$

现在，从图 2-21 就可求出点 T、Q 的坐标了，即：

$$x_T = -OT \cdot \cos 15^\circ \sin 70^\circ = -0.495$$

$$y_T = -OT \cdot \cos 15^\circ \cos 70^\circ = -0.180$$

$$z_T = -OT \cdot \sin 15^\circ = -0.141$$

$$x_Q = -NQ \cos 35^\circ \sin 40^\circ = -19.979$$

$$y_Q = 60 - NQ \cdot \cos 35^\circ \cos 40^\circ = 36.191$$

$$z_Q = NQ \cdot \sin 35^\circ = 21.763$$

本题的全部答案为：

（1）直线 OP 与 MN 的夹角（即两直线平移至相交后的夹角$\overset{\frown}{⑤⑧}$）为 $122^\circ 27' 50''$；

（2）直线 OP 与 MN 间的距离（即两直线间的公垂线段 QT）为 46.715；

（3）见图 2-24(b)，公垂线在 OP 直线上的垂足为 T，T 在 PO 的延长线上，且 OT 长为 0.545；公垂线在 MN 直线上的垂足是 Q，点 Q 在点 M、N 之间，且 NQ 长为 37.943。而两垂足在坐标 x、y、z 中的坐标为：

T (−0.495, −0.180, −0.141), Q (−19.979, 36.191, 21.763)。

第三章 应用实例

前两章，我们总结了空间角度和空间尺寸计算问题的各种类型，并说明了如何运用球面三角来解决这些问题。本章就介绍它在机械工业上的具体应用。

机械及其零、部件是多种多样的。归结起来，它们又都是由一些平面、旋转面（圆柱面、圆锥面等）、曲面或其中的一部分所构成的。这些面在空间都占有确定位置。旋转面的位置，可由其轴线的位置来决定；曲面的位置，可由其基准直线或基准平面的位置来决定。从这个意义上说，机械及其零、部件都是由平面和直线构成的。而这些直线和平面的相互位置问题，就是角度与尺寸的计算问题。从计算关系上看，有的零件只有平面角度与尺寸的计算问题；有的零件还兼有空间角度与尺寸的计算问题。这里只讨论后种零部件在设计与制造中的计算问题。

§ 1 在机床夹具设计中的应用

例一 见图 3-1，要求以P面和O_1、O_2两孔定位，设计一加工斜孔的车床夹具。

1. 角度计算

见图 3-1，取坐标系x、y、z。按坐标面xy作球面投影图，如图 3-2。图中点①、②、③分别表示坐标轴x、y、z，大圆$\overset{\frown}{①②}$就是定位平面P。保持图示角度 10°和 15°作大圆$\overset{\frown}{②④⑦}$和$\overset{\frown}{①⑤④}$。因为零件的斜孔中心线在这两个大圆平面上，所以其交点④就是斜孔的中心线。在大圆$\overset{\frown}{①⑤④}$上取$\overset{\frown}{④⑤}$等于90°，并通过点⑤作大圆$\overset{\frown}{⑥⑤⑧}$，使球面角⑥⑤①等于 90°。根据极与极线的关系可知，大圆$\overset{\frown}{⑥⑤⑧}$是点④的极线。显然点④就是车床夹具的回转中心线，大圆$\overset{\frown}{⑥⑤⑧}$就是夹具回转中心线的法平面，即夹具的

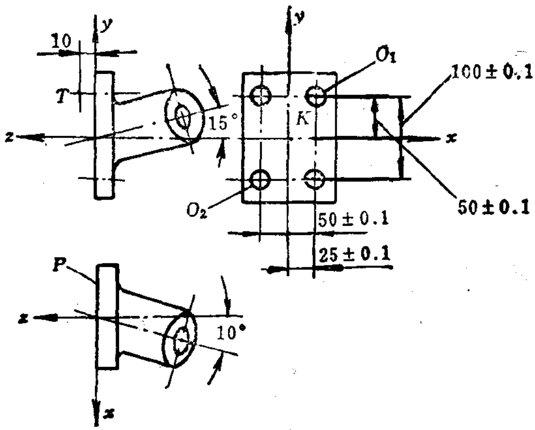


图 3-1

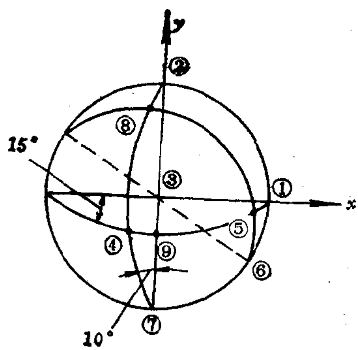


图 3-2

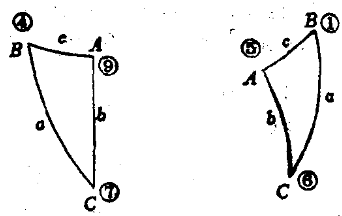


图 3-3

转接盘平面的平行平面。这样，定位平面与转接盘平面间所构成的二面角就是球面角①⑥⑤，二面角的交线（即夹具的基准线）就是点⑥。从图可见，在定位面上，基准线与 x 轴的夹角为$\overset{\frown}{\text{①⑥}}$弧长。∠①⑥⑤和$\overset{\frown}{\text{①⑥}}$可从△⑨④⑦和△⑤①⑥中求出。为此，将这两个球面三角形取出，并均命名为△ABC，见图 3-3。

在△⑨④⑦中，已知$A=90°$，$C=10°$，$b=90°-15°=75°$，求c。

据球面直角三角形公式，有：

$$\mathrm{tg}\,c=\mathrm{tg}\,C\sin b=\mathrm{tg}\,10°\sin 75°=0.170319$$

∴ $c=9°40'$ ④⑨

在△⑤①⑥中，已知$A=90°$，$B=90°-15°=75°$，$c=90°+$④⑨$-$④⑤$=9°40'$，求C、a。

据球面直角三角形公式，有：

$$\cos C=\sin B\cos c=\sin 75°\cos 9°40'=0.952211$$

∴ $C=17°47'10''$ ∠①⑥⑤

$$\mathrm{ctg}\,a=\mathrm{ctg}\,c\cos B=\mathrm{ctg}\,9°40'\cos 75°=1.519476$$

∴ $a=33°21'$ ①⑥

2．尺寸计算

尺寸计算的目的，是为了在定位面P、O_1中心线和夹具回转中心线间建立起准确的位置关系，以保证零件斜孔中心线与夹具回转中心线相重合。取O_1直线上距定位面为10的点T（见图3-1）为基准点。若点T与夹具回转中心线间的位置关系确定了，则问题就解决了。这种位置关系可在如下的两个平面上求出。

1）在定位平面上

将图3-2中的①⑥⑦大圆平面（定位平面P）取出，如图3-4。图中直线M，就是夹具转接盘平面在定位上之交线（基准线）的方向线，也就是通过夹具回转中心线且平行于基准线的平面在定位面上的交线。Ⅰ－Ⅰ剖面线，就表示通过夹具回转中心线且垂直于基准线的平面。点O_1又是点T在定位面上的投影点。显然，尺寸E就是我们所需要的一个位置尺寸，尺寸L是我们所需要的另一位置尺寸的过度数据。从图可得：

$$E=50\sin 33°21'-25\cos 33°21'=6.604$$

$$L=50\cos 33°21'+25\sin 33°21'=55.510$$

2）在Ⅰ－Ⅰ剖面上

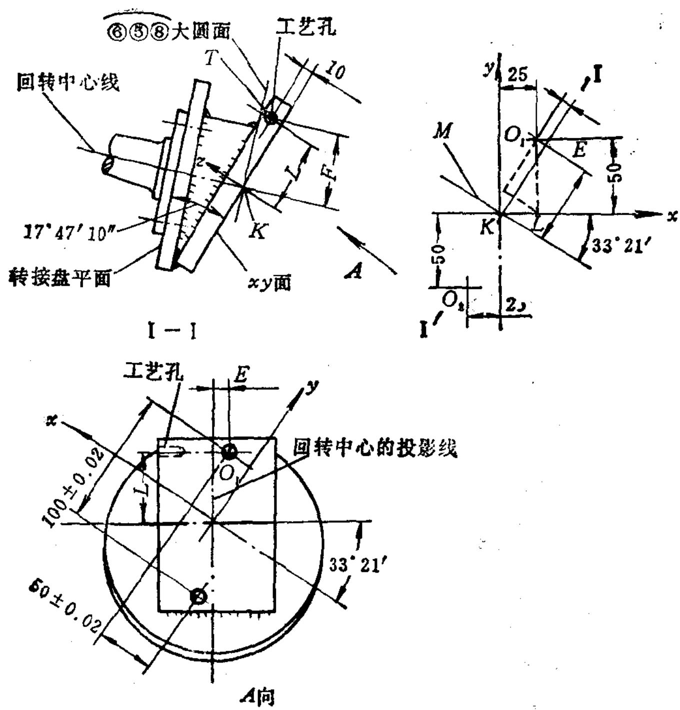


图 3-4

作图 3-4 的 I－I 剖面，得一由定位面和⑥⑤⑧大圆平面所构成的二面角。通过点K作⑥⑤⑧大圆平面线的垂直线，此线就是夹具的回转中心线。尺寸F就是我们所需要的另一位置尺寸。从图可得：

$$F = L\cos 17°47'10'' + 10\sin 17°47'10'' = 55.911$$

现在，这个夹具的角度和尺寸就全部计算完了。在此基础上，设计夹具的结构就容易了。见图 3-4 的 I－I 剖面，根据结构需要（定位面的大小和板材厚度），在适当的位置作⑥⑤⑧大圆平面线的平行线，用以作为夹具的转接盘平面。在转接盘平面上与回转中心线同心的安装一莫氏锥体，用以插入车床主轴孔中。再绘制 I

向视图，则设计的主要工作就完成了。余下的压紧等问题，这里就不谈了。

例二 见图 3-5，要求以M面和O_1、O_2两孔定位，加工斜叉口。设计一铣床夹具。

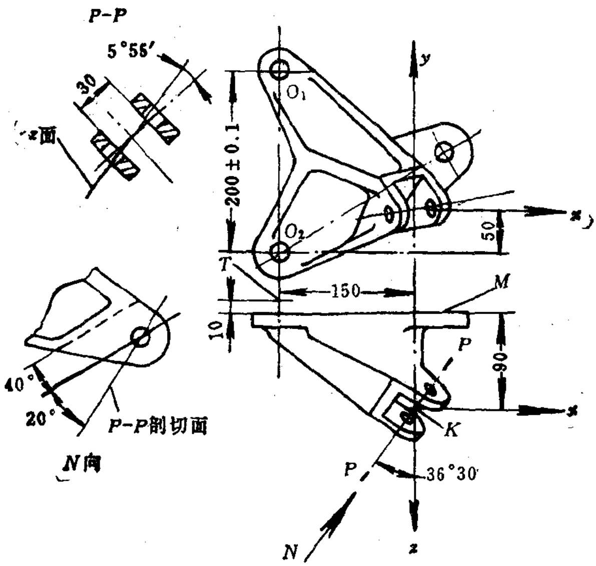


图 3-5

1. 角度计算

见图 3-5，取坐标系 x、y、z。平移M面和斜叉口底、侧面，使其均通过原点。按坐标面 xy 作球面投影图，如图 3-6。图中点①、②、③分别表示坐标轴 x、y、z，大圆①②就是平移后的定位面M。保证图示球面角 36°30′ 作大圆②④⑤，则此大圆就是$P-P$剖切平面。在大圆②④⑤上，取④⑥等于 5°55′，则点⑥就是斜孔中心线。因为斜叉口底面平行于斜孔中心线，即平移后的斜叉口底面必通过斜孔中心线。所以通过点⑥并保证图示球面角 20°所作的大圆⑦⑥⑧，就是平移后的斜叉口底面。在大圆②④⑤上，取⑥⑨等于 90°。通过点⑨作大圆⑩⑨⑧，使球面角

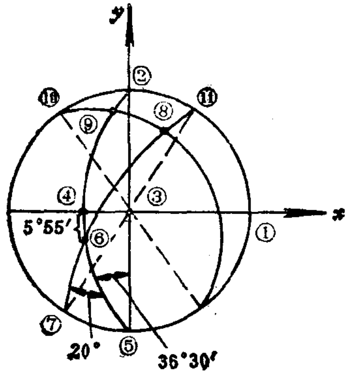


图 3-6

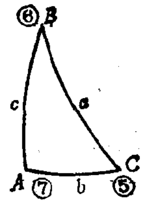


图 3-7

②⑨⑩等于 90°。则大圆⑩⑨⑧是点⑥的极线，也是平移后的叉口侧面。铣床夹具的底面，应该平行于零件的斜叉口底面；夹具底面上的键中心面，应该平行于零件的斜叉口侧面。因此，大圆⑦⑥⑧和⑩⑨⑧又同时是平移后的夹具底面和键中心面。这样，夹具底面与定位面所构成的二面角就是球面角⑤⑦⑥，点⑦就是二面角的交线（夹具基准面的平行线）。在定位面上，y 轴与二面角的交线的夹角为⑤⑦弧长。在夹具底面上，键中心线与二面角的交线的夹角为⑧⑪弧长。下面我们来求这些角度。

为了清楚，将图 3-6 中的△⑦⑥⑤取出，并命名为△ABC，如图 3-7。在这个三角形中，已知 $B=20°$，$C=90°-36°30'=53°30'$，$a=90°-5°55'=84°05'$，求 A、b、c。

据球面三角形角的余弦定理，有：

$$
\begin{aligned}
\cos A &= -\cos B\cos C+\sin B\sin C\cos a \\
&= -\cos 20°\cos 53°30'+\sin 20°\sin 53°30'\cos 84°05' \\
&= -0.530610
\end{aligned}
$$

$$\therefore \quad A=122°02'50'' \qquad \angle ⑤⑦⑥$$

据纳皮尔公式，有：

$$\mathrm{tg}\frac{b+c}{2}=\frac{\cos\frac{1}{2}(B-C)}{\cos\frac{1}{2}(B+C)}\mathrm{tg}\frac{a}{2}$$

$$\mathrm{tg}\frac{b-c}{2}=\frac{\sin\frac{1}{2}(B-C)}{\sin\frac{1}{2}(B+C)}\mathrm{tg}\frac{a}{2}$$

代入已知条件，得：

$$\mathrm{tg}\frac{b+c}{2}=\frac{\cos(-16°45')}{\cos 36°45'}\mathrm{tg}42°02'30''=1.077640$$

$$\mathrm{tg}\frac{b-c}{2}=\frac{\sin(-16°45')}{\sin 36°45'}\mathrm{tg}42°02'30''=-0.434050$$

∴ $$\frac{b+c}{2}=47°08'20''$$

$$\frac{b-c}{2}=-23°27'50''$$

从而得： $b=\frac{b+c}{2}+\frac{b-c}{2}=23°40'30''$ ⑤⑦

$c=\frac{b+c}{2}-\frac{b-c}{2}=70°36'10''$ ⑥⑦

见图 3-6，因为点⑥是大圆⑩⑨⑧的极。所以⑥⑧之长为 90°。从而可得：

⑧⑪ $=180°-$ ⑥⑦ $-$ ⑥⑧ $=19°23'50''$

2．尺寸计算

尺寸计算的目的，是为了在定位面M、O_2中心线和对刀面间建立起准确的位置关系。对刀面有叉口底面和叉口侧面两个对刀面。我们取O_2中心线上距定位面为 10 的点T（见图 3-5）为基准点，并求此点到两个对刀面的距离。

1） 点T到叉口底面对刀面的距离

这个距离尺寸可在如下的两个平面上求出。

i　在定位平面上

将图 3-6 中的坐标面 xy 取出，如图 3-8。根据前面的计算结

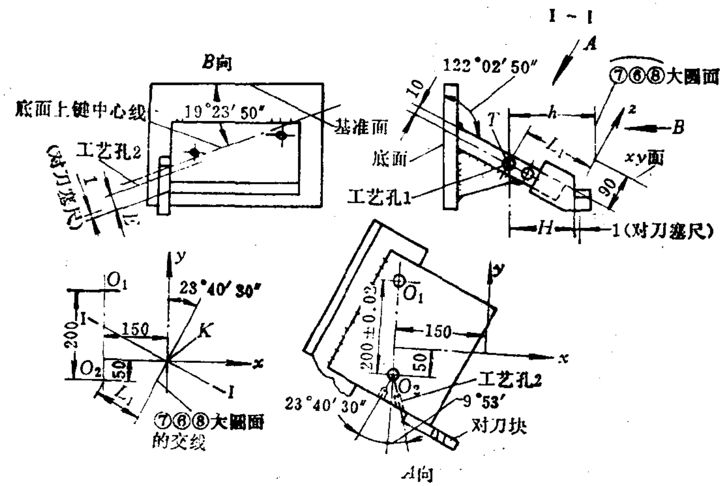


图　3-8

果，图中 23°40′30″所指的斜线，就是⑦⑥⑧大圆平面在xy面上的交线，也就是通过点K（见图 3-5）且平行于斜叉口底面之平面在 xy 面上的交线。点K和 O_1、O_2 在 xy 面上的位置如图所示。从图可得：

$$L_1 = 150\cos 23°40'30'' - 50\sin 23°40'30''$$
$$= 117.298$$

ii　在 I - I 剖面上

见图 3-8，作 I - I 剖面，得一由 xy 面和⑦⑥⑧大圆平面所构成的二面角。平行于 xy 面并相距 90 的直线就是夹具的定位面。保持尺寸 L_1 并垂直于定位面的直线就是 O_2 中心线。在 O_2 中心线上并保证图示尺寸 10 的点就是基准点 T。尺寸 h 就是点 T 到通过点K且平行于斜叉口底面的平面的距离。从图可得：

$$h = (10+90)\sin 32°02'50'' + L_1\cos 32°02'50'' = 152.485$$

因此，点 T 到斜叉口底面对刀面的距离 H 为：

$$H = h - 40 - 1 = 111.485$$

为了测量这个尺寸，通过点 T 加工一工艺孔 1，如图所示。

2）点 T 到叉口侧面对刀面的距离

这个距离尺寸可在如下的两个平面上求出。

i　在坐标面 xz 上

为了清晰，将图 3-5 的有关部分重新作一图（图 3-9）。仍取点 T 为基准点，通过点 T 向 $P-P$ 剖切线引垂线。从图可得：

$$L_2 = 150\sin 36°30' - 100\cos 36°30' = 8.838$$

ii　在 $P-P$ 剖面上

作 $P-P$ 剖面图，如图 3-9。显然，尺寸 F 就是点 T 到通过点 K 且平行于叉口侧面的平面的距离。从图可得：

$$F = 50\sin 5°55' + L_2\cos 5°55' = 13.945$$

因此，点 T 到叉口侧面（N）的对刀面的距离 E 为：

$$E = F + 15 + 1 = 29.945$$

为了测量尺寸 E，在夹具上还需通过点 T 加工一工艺孔 2（见图 3-8）。为了加工工艺孔的方便，应使它平行于定位面；为了便于用它测量尺寸 E，还应使它平行于斜叉口侧面。从图 3-6 可见，只有取点⑩所表示的直线作为工艺孔 2 的方向，才能同时满足上述两条要求。因此还需要求出 $\overset{\frown}{②⑩}$ 弧长，为此再将图 3-6 的

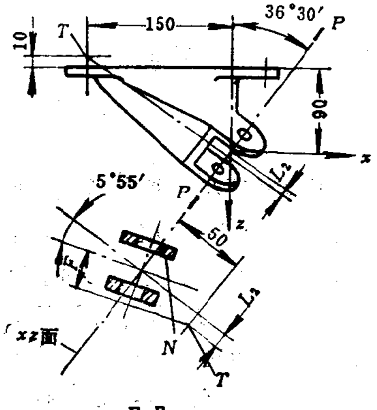


图　3-9

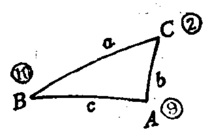


图　3-10

△⑨⑩②取出，并命名为△ABC，如图 3-10。已知 $A=90°$，$C=90°-36°30'=53°30'$。因为⑥⑨和④②均为 90°（见图 3-6），所以 $b=$④⑥$=$②⑨$=5°55'$，求 a。

据球面直角三角形公式，有：

$$\operatorname{ctg} a=\operatorname{ctg} b\cos C=\operatorname{ctg}5°55'\cos53°30'$$

$$\therefore \qquad a=9°53' \qquad \text{②⑩}$$

现在全部计算工作已经完成。在此基础上设计夹具就容易了。见图 3-8 的 I－I 剖面，根据结构需要，在适当的位置作⑦⑥⑧大圆平面线的平行线，用以作为夹具的底平面。再绘制它的 A、B 向视图。在定位面上，O_1、O_2 两孔中心连线与基准线的夹角为 23°40′30″，工艺孔 1、2 的位置如图所示。在底面上，键中心线与基准线的夹角为 19°23′50″。根据计算过程可知，工艺孔 2 在夹具底面上的投影，必平行于键中心线。

例三　见图 3-5，要求以 M 面和 O_1、O_2 两孔定位，钻斜叉口的孔。设计一钻孔导具。

1. 角度计算

为了利用前面的计算结果和清晰，将图 3-6 的有关部分取出，如图 3-11。根据前面图 3-6 的作图过程可知，大圆⑩⑨⑧是通过零件的点 K 且平行于斜叉口侧面的大圆平面，也就是钻孔导具的底平面的平行面。所以，夹具的底面与定位面所构成的二面角就是球面角②⑩⑨。二面角的交线（夹具基准面的平行线）与 y 轴的夹角为②⑩弧长。在图 3-10 中，已经求出②⑩弧长为 9°53′。下面再继续从图 3-10 中求 B。

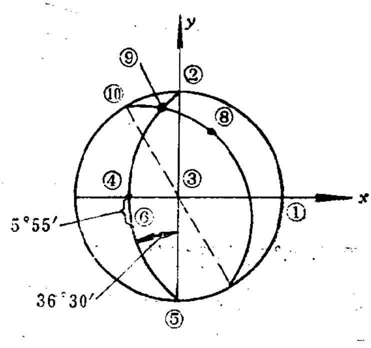


图 3-11

据球面直角三角形公式，有：

$$\cos B = \sin C \cos b = \sin 53°30' \cos 5°55' = 0.799575$$

∴ $$B = 36°54'40'' \qquad \angle②⑩⑨$$

2．尺寸计算

见图 3-5，仍以点T为基准点。并在如下的两个平面上求点T与斜孔中心线间的位置关系。

1）在坐标面xy上

将图 3-11 的坐标面xy取出，如图 3-12。根据前面的计算结

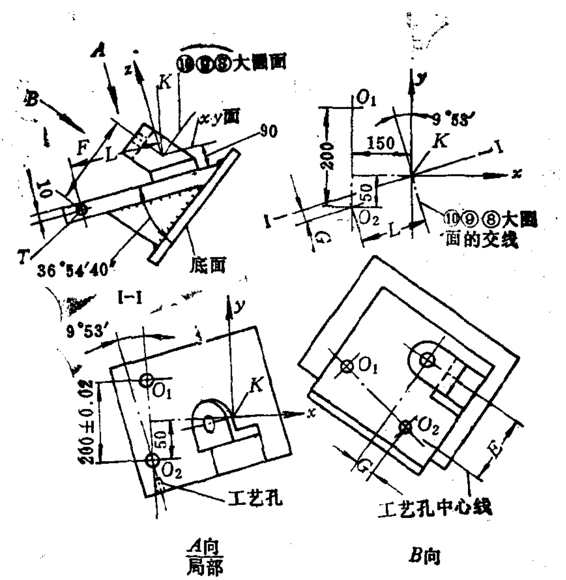


图 3-12

果，图中 9°53′所指的斜线，就是⑩⑨⑧大圆平面在xy面上的交线，也就是通过零件的点K且平行于斜叉口侧面的平面在xy面上的交线。点K、O_1、O_2在xy面上的投影位置如图所示。从图可得：

$$G = 50\cos 9°53' - 150\sin 9°53' = 23.512$$

$$L = 150\cos 9°53' + 50\sin 9°53' = 156.356$$

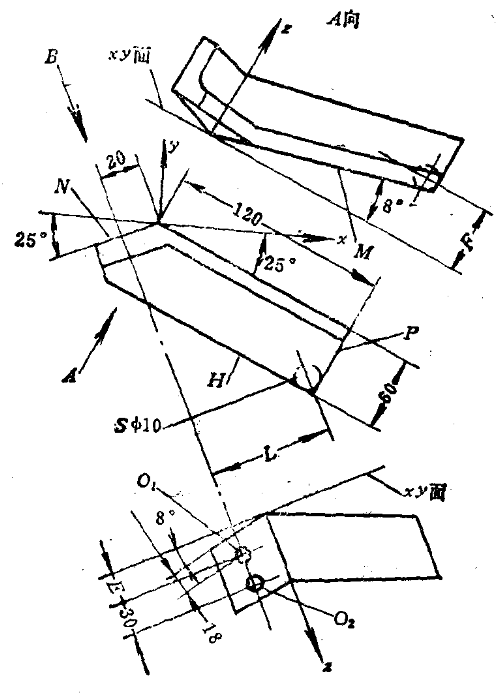
2）在Ⅰ-Ⅰ剖面上

作图3-12的Ⅰ-Ⅰ剖面，得一由xy面和⑩⑨⑧大圆平面所构成的二面角。平行于xy面并相距90的直线就是夹具的定位面。保持尺寸L并垂直于定位面的直线，就是O_2中心线。在O_2中心线上并保证图示尺寸10的点，就是基准点T。尺寸F就是钻套孔的另一位置尺寸。从图可得：

$$F = L\cos 36°54'40'' + 100\sin 36°54'40''$$
$$= 185.075$$

为了测量尺寸F，通过点T加工一个工艺孔，如图所示。尺寸E可通过O_2中心测量，不必另加工工艺孔。

现在全部计算工作已经完成。这个钻孔导具的简要结构见图3-12的Ⅰ-Ⅰ剖面及其A、B向视图。这个夹具在结构和制造上



B向

图 3-13

都是很简单的。

例四 见图 3-13，要求以M、P、H三面定位，钻O_1、O_2两孔。设计一钻孔导具。

1. **角度计算**

见图 3-13，取坐标系x、y、z，并将有关平面均平移至通过坐标原点。按坐标面xy作球面投影图，如图 3-14。图中点①、

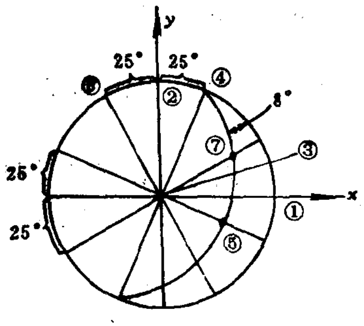


图 3-14

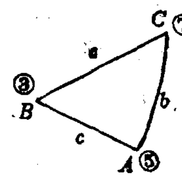


图 3-15

②、③分别表示坐标轴x、y、z，大圆④⑤、④⑥、③⑤、③⑦分别是平移后的平面M、P、H、N，大圆⑥③是平移后的O_1、O_2两孔中心面。因为夹具底面应平行于N面，所以大圆③⑦还是夹具底面的平行平面。这样，夹具底面与定位面M所构成的二面角，就是球面角⑤⑦③。在定位平面M上，H面与二面角交线的夹角为⑤⑦弧长。在夹具的底平面上，O_1、O_2两孔中心面与二面角交线的夹角为③⑦弧长。这三个角度可从△⑤③⑦中求出。

为了清楚，将△⑤③⑦取出并命名为△ABC，如图 3-15。已知$A=90°$，$B=25°+25°=50°$，$c=90°-8°=82°$，求C、a、b。

据球面直角三角形公式，有：

$$\cos C=\sin B\cos c=\sin 50°\cos 82°=0.106613$$

$$\therefore \quad C=83°52'50'' \qquad \angle ⑤⑦③$$

$$\text{ctg}\, a = \text{ctg}\, c \cos B = \text{ctg}82^\circ \cos 50^\circ = 0.090338$$

$$\therefore \qquad a = 84^\circ 50' 20'' \qquad \widehat{③⑦}$$

$$\text{tg}\, b = \text{tg}B \sin c = \text{tg}50^\circ \sin 82^\circ = 1.180156$$

$$\therefore \qquad b = 49^\circ 43' 30'' \qquad \widehat{⑤⑦}$$

2. 尺寸计算

因为零件以M、P、H三面定位，所以就可以在夹具的这三个定位面的交角处，放一直径为$S\phi 10$的钢球，以其球心作为基准点。这个基准点与钻套中心线间的位置关系，可由如下的两个尺寸确定。

1) 钢球中心点到两孔中心面的距离

从图 3-13 可见，尺寸L就是钢球中心点到O_1、O_2两孔中心面的距离，其值为：

$$L = 20 + (120 - 5)\cos 50^\circ - (60 - 5)\sin 50^\circ$$
$$= 51.788$$

2) 钢球中心点在两孔中心面上的投影

从图 3-13 可见，尺寸E、F分别是O_1中心线和钢球中心点到xy面的距离，其值为：

$$E = 20\text{tg}8^\circ + \frac{18}{\cos 8^\circ} = 20.988$$

$$F = 120\text{tg}8^\circ + 5\text{ctg}\frac{90^\circ + 8^\circ}{2} = 21.211$$

根据E、F之值可知，钢球中心点在O_1、O_2两孔中心面上的投影，位于两孔中心线之间，而且与O_1中心线相距 0.223（F、E之差）。

现在全部计算工作已经完毕，夹具的简要结构如图 3-16。

例五 见图 3-17，要求以$\phi 80$柱面和N、P面定位，加工两斜孔。设计一车床夹具。

因为两斜孔中心线相交，故可用一个车床夹具加工两个斜孔。这个夹具应由两个部件构成，一个是为被加工零件定位和夹紧的

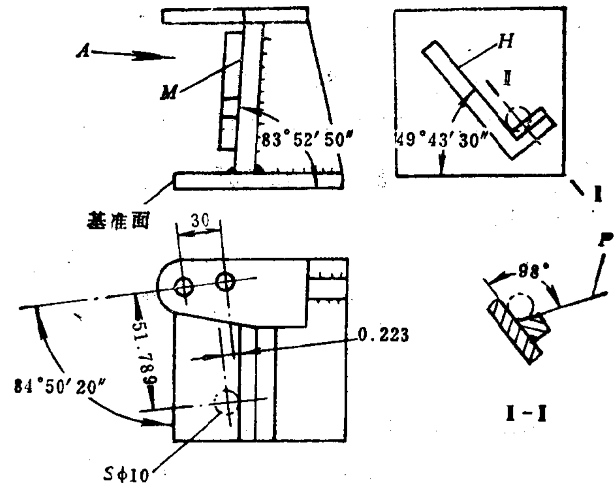

A
M
83°52′50″
基准面
H
II
49°43′30″
I
P
98°
30
0.223
51.789
84°50′20″
SΦ10
I-I

图 3-16

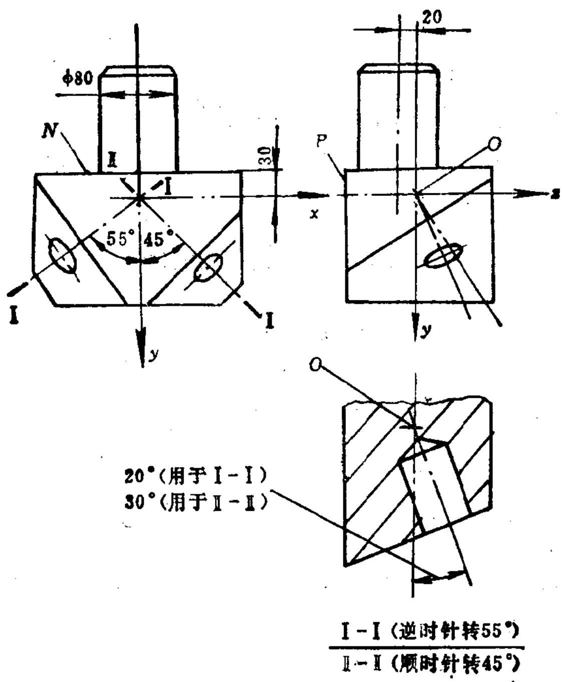

Φ80
N
II
I
30
55°
45°
I
I
x
y
20
P
O
z
y
O
20°(用于I-I)
30°(用于II-II)
I-I(逆时针转55°)
II-II(顺时针转45°)

图 3-17

部件，一个是供前一部件转位并与车床主轴相连结的部件。后一部件由弯板和转接盘构成。弯板可是直角的，也可是非直角的。这里我们摘两个设计方案。

1．弯板为直角的

弯板为直角，两斜孔中心面就应平行于转位平面，并由一定的角度和尺寸作保证，以达到通过转位（分度）而使两孔中心线先后处于加工位置。

1）角度计算

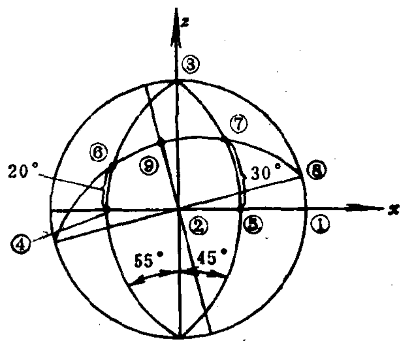


图 3-18

见图 3-17，取坐标系 x、y、z，平移平面N、P和ϕ80 中心线，使其均通过坐标原点。按坐标面 xz 作球面投影图，如图 3-18 。图中点①、②、③分别表示坐标轴x、y、z。大圆①③和①②就是平移后的平面N和P，点②还同时表示平移后的ϕ80 中心线。保证图示球面角 55°和 45° 作大圆③④和③⑤，则此两大圆就分别是 I－I 和 II－II 剖切平面。在大圆③④和③⑤上，取④⑥和⑤⑦分别为 20°和 30°，得点⑥、⑦，则此两点就分别是两斜孔中心线。通过点⑥、⑦作大圆⑥⑦⑧，则此大圆就是两斜孔中心面。若以两孔中心面的平行平面作为转位平面，并以一定的尺寸和角度作保证，就可在直角弯板上通过分度而使两孔中心线先后处于加工位置。故大圆⑥⑦⑧就是转位平面的平行平面。采用V形块定位ϕ80，显然V形块中心平面垂直于N面，为简化结构，它还应垂直于转位平面。作大圆①③和⑥⑦⑧的公垂大圆②⑨，则此大圆就是V形块中心平面的平行平面。这样，第一部件的定位面N与转位平面所构成的二面角就是球面角③⑧⑦。在定位面上，定向面P与二面角交线的夹角为①⑧弧长。在转位平面上，两个转位角

分别为$\overset{\frown}{⑥⑨}$和$\overset{\frown}{⑦⑨}$弧长。这些角度，可在△③⑥⑦和△⑦③⑧中求出。为此，将这两个球面三角形取出，并均命名为△ABC，见图 3-19。

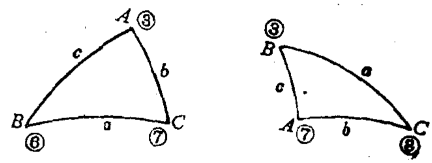


图 3-19

在△③⑥⑦中，已知$A=55°+45°=100°$，$b=90°-30°=60°$，$c=90°-20°=70°$，求C、a。

据球面三角形的余切定理，有：

$$\operatorname{ctg} C=\frac{\operatorname{ctg} c \sin b}{\sin A}-\cos b \operatorname{ctg} A$$

$$=\frac{\operatorname{ctg}70°\sin60°}{\sin100°}-\cos60°\operatorname{ctg}100°$$

$$=0.408234$$

∴ $$C=67°47'40'' \qquad \angle ③⑦⑥$$

据球面三角形的余弦定理，有：

$$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A$$

$$=\cos60°\cos70°+\sin60°\sin70°\cos100°$$

$$=0.029696$$

∴ $$a=88°17'50'' \qquad \overset{\frown}{⑥⑦}$$

在△⑦③⑧中，已知$B=90°-45°=45°$，$A=180°-\angle③⑦⑥=112°12'20''$，$c=60°$，求$C$、$a$、$b$。

据球面三角形角的余弦定理，有：

$$\cos C=-\cos A\cos B+\sin A\sin B\cos c$$

$$=-\cos112°12'20''\cos45°+\sin112°12'20''\sin45°\cos60°$$

$$=0.594569$$

∴ $$C=53°31'10'' \qquad \angle③⑧⑦$$

据纳皮尔公式，有：

$$\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}=\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}\operatorname{tg}\frac{c}{2}$$

$$\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}=\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}\operatorname{tg}\frac{c}{2}$$

代入已知条件，得：

$$\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}=\frac{\cos 33°36'10''}{\cos 78°36'10''}\operatorname{tg}30°=2.433441$$

$$\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}=\frac{\sin 33°36'10''}{\sin 78°36'10''}\operatorname{tg}30°=0.325952$$

$$\therefore \quad \frac{a+b}{2}=67°39'40''$$

$$\frac{a-b}{2}=18°03'10''$$

从而得：

$$a=\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}=85°42'50'' \qquad \overset{\frown}{③⑧}$$

$$b=\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}=49°36'30'' \qquad \overset{\frown}{⑦⑧}$$

从图 3-18 可得：

$$\overset{\frown}{①⑧}=\overset{\frown}{③①}-\overset{\frown}{③⑧}=90°-85°42'50''=4°17'10''$$

$$\overset{\frown}{⑦⑨}=\overset{\frown}{⑧⑨}-\overset{\frown}{⑦⑧}=90°-49°36'30''=40°23'30''$$

$$\overset{\frown}{⑥⑨}=\overset{\frown}{⑥⑦}-\overset{\frown}{⑦⑨}=88°17'50''-40°23'30''=47°54'20''$$

2）尺寸计算

将图 3-18 的xz面取出，如图 3-20。点O、ϕ80 中心和P面在此面上的投影位置如图所示。直线M为两孔中心面在xz面上的交线，点O必须位于夹具的回转中心线上。尺寸E就是夹具回转中心线与V形块中心面的距离，尺寸L是计算另一尺寸的过渡数

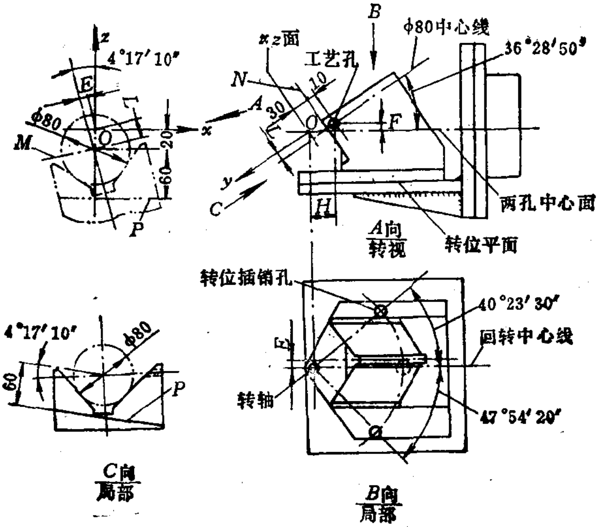


图 3-20

据。从图可得：

$$E=20\sin 4^{\circ}17'10''=1.495$$

$$L=20\cos 4^{\circ}17'10''=19.944$$

再作图 3-20 的A向视图，得一个由xz面和两孔中心面所构成的二面角。夹具回转中心线应位于两孔中心面上。定位面N应平行于xz面且相距为30。垂直于xz面且与点O相距为L的直线，就是φ80的中心线。转位平面应平行于两孔中心面。转位的转轴中心线，应通过点O且垂直于转位平面。为了保证上述位置关系和便于测量，按图示位置加工一个工艺孔，并求尺寸F和H。从图可得：

$$F=(30+10)\sin 36^{\circ}28'50''-L\cos 36^{\circ}28'50''=7.746$$

$$H=(30+10)\cos 36^{\circ}28'50''+L\sin 36^{\circ}28'50''=44.020$$

现在，按第一方案设计车床夹具的计算工作已经完毕。夹具的结构见图 3-20 的A、B、C向视图。这样给出角度和尺寸E、

F、H的夹具，在制造上是非常方便的。

2．弯板为非直角的

弯板的角度可任意选取，但弯板角度确定之后，定位面N与转位平面间的夹角也就确定了。当定位面N与转位平面垂直时，夹具的结构较为简单。下面就按这种情况设计夹具。

1）角度计算

为了清晰，将图 3-18 的有关部分取出，如图 3-21。根据前面的计算结果，已知⑥⑦弧长为88°17′50″。在大圆⑥⑦⑧上取⑦⑬等于⑥⑦之半的余角，即⑦⑬＝45°51′5″，得点⑬。通过点⑬、②作大圆②⑬⑫。再分别通过点⑥、⑦作大圆②⑬⑫的垂直大圆弧⑥⑩和

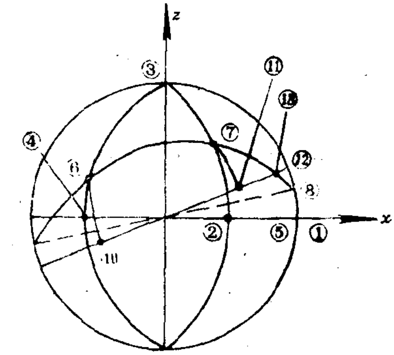


图 3-21

⑦⑪。从作图过程可知⑥⑩和⑦⑪两大圆弧必相等，即两斜孔中心线与②⑬⑫大圆平面的夹角相等，故可用大圆②⑬⑫作为转位平面。由图可见，转位平面与定位面N垂直，转位平面与定向面P的夹角为①⑫弧长。再取⑦⑪（或⑥⑩）弧长作为弯板的斜角，取②⑩和②⑪作为转位角。这样，通过转位并加上一定的尺寸作保证，就可使两孔中心线先后处于加工位置。这些角度可从△⑫⑬⑧、△⑪⑦⑬和△⑩⑥⑬中求出。为此，将这三个三角形取出，并均命名为△ABC，见图 3-22。

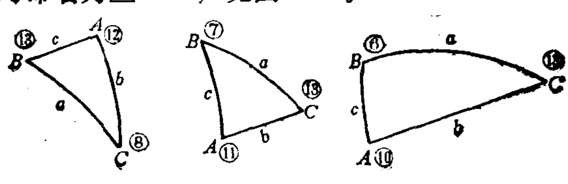


图 3-22

在△⑫⑬⑧ 中，已知 $A=90°$，$C=\angle$③⑧⑦$=53°31'10''$，$a=\overset{\frown}{\text{⑦⑧}}-\overset{\frown}{\text{⑦⑬}}=49°36'30''-45°51'5''=3°45'25''$，求 B、b、c。

据球面直角三角形公式，有：

$\operatorname{ctg}B=\operatorname{tg}C\cos a=\operatorname{tg}53°31'10''\cos3°45'25''=1.349476$

∴ $B=36°32'20''$ $\angle$⑧⑬⑫

$\operatorname{tg}b=\operatorname{tg}a\cos C=\operatorname{tg}3°45'25''\cos53°31'10''=0.039041$

∴ $b=2°14'10''$ $\overset{\frown}{\text{⑧⑫}}$

$\sin c=\sin a\sin C=\sin3°45'25''\sin53°31'10''=0.052685$

∴ $c=3°01'10''$ $\overset{\frown}{\text{⑫⑬}}$

根据直角三角形的性质，因为 C 小于 $90°$，所以它的对边 c 也小于 $90°$，故 c 只有这唯一的解。

在△⑪⑦⑬中，已知 $A=90°$，$a=45°51'5''$，$C=\angle\overset{\frown}{\text{⑧⑬⑫}}=36°32'20''$，求 b、c。

据球面直角三角形公式，有：

$\operatorname{tg}b=\operatorname{tg}a\cos C=\operatorname{tg}45°51'5''\cos36°32'20''=0.827693$

∴ $b=39°36'50''$ $\overset{\frown}{\text{⑪⑬}}$

$\sin c=\sin a\sin C=\sin45°51'5''\sin36°32'20''=0.427198$

∴ $c=25°17'20''$ $\overset{\frown}{\text{⑦⑪}}$

因为 C 小于 $90°$，所以 c 也必小于 $90°$，即 c 有这唯一的解。

在△⑩⑥⑬中，已知 $A=90°$，$C=36°32'20''$，$a=\overset{\frown}{\text{⑦⑬}}+\overset{\frown}{\text{⑥⑦}}=45°51'5''+88°17'50''=134°08'55''$，求 b。

据球直角三角形公式，有：

$\operatorname{tg}b=\operatorname{tg}a\cos C=\operatorname{tg}134°08'55''\cos36°32'20''=-0.827693$

∴ $b=140°23'10''$ $\overset{\frown}{\text{⑩⑬}}$

归纳前面的计算结果：

$$\overset{\frown}{\text{⑦⑪}}=25°17'20''$$

$$\widehat{①⑫}=90^\circ-\widehat{③⑧}+\widehat{⑧⑫}=6^\circ 31' 20''$$

$$\widehat{②⑪}=90^\circ-\widehat{⑫⑬}-\widehat{⑪⑬}=47^\circ 22'$$

$$\widehat{②⑩}=\widehat{⑩⑬}+\widehat{⑫⑬}-90^\circ=53^\circ 24' 20''$$

2）尺寸计算

将图 3-21 的xz面取出，如图 3-23。由图可见，它与图 3-20 情况相似，计算原理也完全相同，这里就不谈了。下面只求图示尺寸E、L。

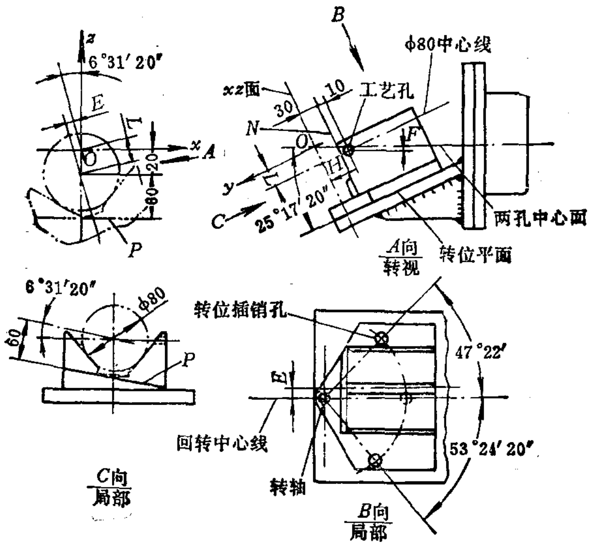


图 3-23

从图可得：

$$E=20\sin 6^\circ 31' 20''=2.272$$

$$L=20\cos 6^\circ 31' 20''=19.871$$

再作图 3-23 的A向视图，从图可得：

$$F=L\cos 25^\circ 17' 20''-(30+10)\sin 25^\circ 17' 20''$$
$$=0.879$$

$$H=10+30=40$$

现在按第二方案设计车床夹具的计算工作已经结束。夹具的简要结构见图 3-23 的A、B、C向视图。这样的夹具制造也方便。

例六 见图3-24，要求以H、S、G三面定位，加工M、N、P三面。设计一铣床夹具。

要在一个铣床夹具上加工M、N、P三面，夹具就必须有转位装置。通过转位而得到三种位置状态，这三种位置应分别使三个被加工平面处于水平位置，而且三面对夹具底面应具有相同的高度。满足这一要求的夹具，就可以一次对刀并通过转位而加工出三个平面。这个夹具，应由两个部件组成，一个是为被加工零件定位和夹紧的部件，一个是供前一部件转位并与铣床工作台面相连结的弯板。前一部件由定位面和转位平面构成。转位平面与三个被加工平面应具有相等的夹角，从而也就决定了定位面与转位平面间的二面角。后一部件由转位平面和夹具底面构成，而且此二平面间的夹角应等于前一部件的转位平面与被加工面间的夹角。

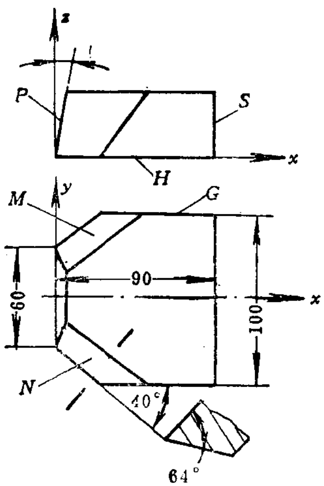


图 3-24

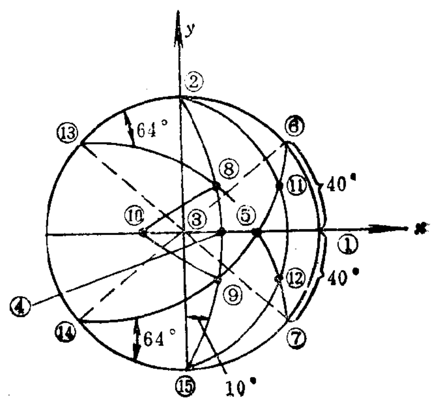


图 3-25

1. 角度计算

见图3-24，取坐标系 x、y、z，并平移各有关平面，使其均通过坐标原点。按坐标面xy作球面投影图，如图3-25。图中点①、②、③分别表示坐标轴 x、y、z，大圆①②、②④分别表示平面H、P，大圆①③、⑥⑨、⑦⑧分别表示平移后的平面G、M、N。作∠⑨⑧⑬、∠⑧⑨⑭的角分线⑧⑩、⑨⑩，交∠⑧⑤⑨的角分线⑤⑩于点⑩❶。显然，点⑩到大圆⑦⑧、②④、⑥⑨的球面距离相等。作点⑩的极线②⑪⑫，则此极线与⑦⑧、②④、⑥⑨三大圆的夹角相等。所以，大圆②⑪⑫就是转位面的平行平面，大圆弧②⑪和⑮⑫就是转位平面上的转位角；∠⑥②⑪就是定位面H与转位平面间的二面角；∠⑧②⑪就是弯板的转位平面与夹具底面间的二面角。这些角度可从△②⑥⑨、△④⑩⑨、△②⑥⑪中求出。为此将这些三角形取出，并均命名为△ABC，如图 3-26。

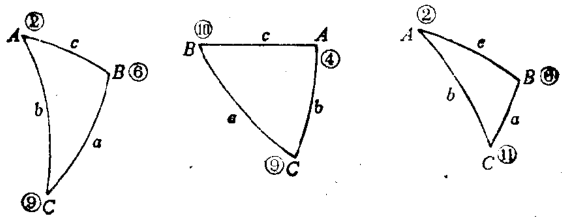


图 3-26

在△②⑥⑨中，已知 $A=80^\circ$，$B=180^\circ-64^\circ=116^\circ$，$c=90^\circ-40^\circ=50^\circ$，求$C$、$b$。

据球面三角形角的余弦定理，有：

❶ 三个被加工平面，每个面都有两个侧面，一个是加工的一侧，一个是与零件实体相连结的一侧。作角分线时，应在二平面的同侧进行，以保证各平面的相同一侧与转位平面的夹角相等。

$$\cos C = -\cos A\cos B + \sin A\sin B\cos c$$
$$= -\cos 80^\circ\cos 116^\circ + \sin 80^\circ\sin 116^\circ\cos 50^\circ$$
$$= 0.645079$$

$\therefore \qquad C = 49^\circ 49' 40'' \qquad \angle②⑨⑥$

据球面三角形的余切定理，有：

$$\operatorname{ctg} b = \operatorname{ctg} c\cos A + \frac{\sin A\operatorname{ctg} B}{\sin c}$$
$$= \operatorname{ctg}50^\circ\cos 80^\circ + \frac{\sin 80^\circ\operatorname{ctg}116^\circ}{\sin 50^\circ}$$
$$= -0.481309$$

$\therefore \qquad b = 115^\circ 42' 10'' \qquad \overset{\frown}{②⑨}$

在△④⑩⑨中，已知 $A=90^\circ$，$C=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle②⑨⑥)=65^\circ 05' 10''$，　$b=\overset{\frown}{②⑨}-90^\circ=25^\circ 42' 10''$，求 c。

据球面直角三角形公式，有：

$\operatorname{tg} c = \operatorname{tg} C\sin b = \operatorname{tg}65^\circ 05' 10''\sin 25^\circ 42' 10'' = 0.933740$

$\therefore \qquad c = 43^\circ 02' 10'' \qquad \overset{\frown}{④⑩}$

在△②⑥⑪中，已知 $c=50^\circ$，$B=116^\circ$，$A=90^\circ-10^\circ+\overset{\frown}{④⑩}-90^\circ=33^\circ 02' 10''$，求 b。

据球面三角形的余切定理，有：

$$\operatorname{ctg} b = \operatorname{ctg} c\cos A + \frac{\sin A\operatorname{ctg} B}{\sin c}$$
$$= \operatorname{ctg}50^\circ\cos 33^\circ 02' 10'' + \frac{\sin 33^\circ 02' 10''\operatorname{ctg}116^\circ}{\sin 50^\circ}$$
$$= 0.356340$$

$\therefore \qquad b = 70^\circ 23' 10'' \qquad \overset{\frown}{②⑪}$

归纳一下前面的计算结果，有：

$$\overset{\frown}{②⑪} = 70^\circ 23' 10''$$

$$\angle⑥②⑪ = 90^\circ - 10^\circ + \overset{\frown}{④⑩} - 90^\circ = 33^\circ 02' 10''$$

$$\angle ⑧②⑪ = 90^\circ - 10^\circ - \angle ⑥②⑪ = 46^\circ 57' 50''$$

2. 尺寸计算

尺寸计算的目的，就是在转位平面上确定转轴的位置，以保证它转至三种位置时，三个被加工面对底面等高。这样，加工一个零件的三个平面时，只需对刀一次。进而再求出这个对刀面的位置尺寸。

将图 3-25 的xy面取出，如图 3-27。作A向视图，得夹具的各平面间的角度关系。为确定转轴的位置，通过被加工零件的顶

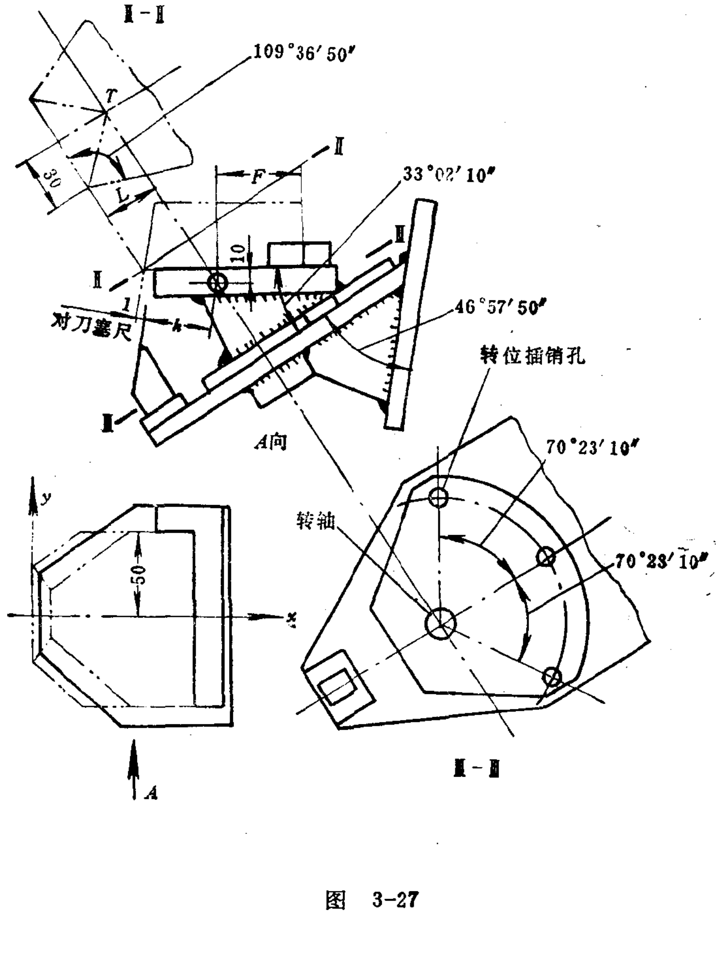


图 3-27

端且平行于转位平面作Ⅱ-Ⅱ剖面，得被加工零件的剖切轮廓线。作角$109°36'50''$（②⑪弧长的补角）的角分线，得交点T。通过点T作转位平面的垂直线，则此直线上的任何一点到三个被加工面的距离都相等。所以，用这个直线作为转轴就满足了上述要求。为了确定这个直线相对于定位面的位置，在此直线上加工一工艺孔，并求有关尺寸L、F、h。从图可得：

$$L=30\operatorname{tg}\frac{109°36'50''}{2}=42.539$$

$$F=90-\left(\frac{L}{\cos 33°02'10''}+10\operatorname{tg}33°02'10''\right)=32.754$$

$$h=\left(\frac{L}{\cos 33°02'10''}+10\operatorname{tg}33°02'10''\right)\cos 10°$$

$$+10\sin 10°-1=57.113$$

现在角度和尺寸的计算工作已经完毕。夹具的简要结构见图3-27。

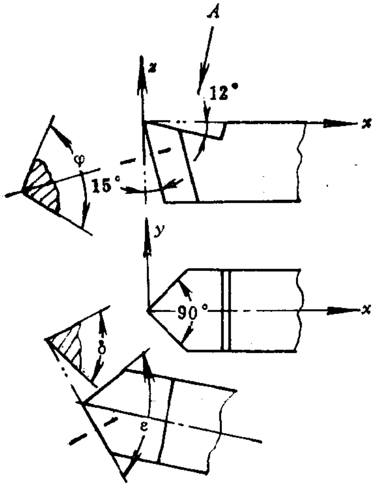
§2　在刀具设计与制造中的应用

例一　如图3-28所示的角度车刀，其前角为12°，刀尖后角为15°，刀尖水平投影角为90°，求前面上的刀尖角ε及二面角φ、δ。

见图3-28，取坐标系x、y、z，并按坐标面xy作球面投影图，如图3-29。图中点①、②、③分别表示坐标轴x、y、z。作大圆②④，使球面角④②⑤等于12°，则大圆②④就是车刀的前面。在大圆①②上取⑤⑥和⑤⑦均为45°，得点⑥、⑦。通过点⑥、③和点⑦、③作两个大圆，交大圆②④于点⑧、⑨，则此两点就分别是前面与主、副两后面的交线。在大圆①③上取③⑩等于15°，得点⑩，则此点就是主、副两后面的交线。通过点⑧、⑩和⑨、⑩作两个大圆，则此两大圆就是主、副两后面。从图可见，大圆弧⑧⑨之长就是角ε，球面角⑧⑩⑨就是角φ，球面角④⑧⑩就是角δ。这几个角度可从△④③⑧和△④⑩⑧中求出。

351207

为此将这两个三角形取出，并均命名为$\triangle ABC$，如图 3-30。



A向

图 3-28

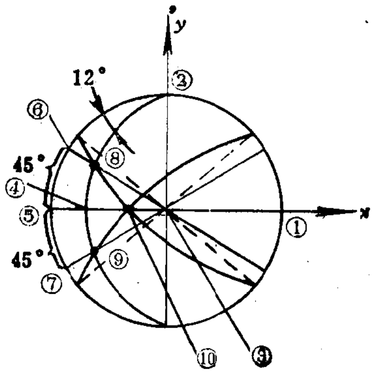


图 3-29

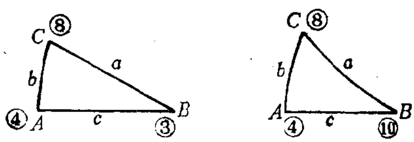


图 3-30

在 $\triangle$④③⑧ 中，已知 $A=90°$，$B=45°$，$c=90°-12°=78°$，求b。

据球面直角三角形公式，有：

$$\operatorname{tg} b=\operatorname{tg} B\sin c=\operatorname{tg}45°\sin78°=0.978148$$

$$\therefore \qquad b=44°22' \qquad \overset{\frown}{④⑧}$$

在$\triangle$④⑩⑧中，已知$A=90°$，$b=\overset{\frown}{④⑧}=44°22'$，$c=90°-12°-15°=63°$，求$B$、$C$。

据球面直角三角形公式，有：

$$\operatorname{ctg} B=\operatorname{ctg} b \sin c=\operatorname{ctg} 44^{\circ} 22' \sin 63^{\circ}=0.910925$$

$$\therefore \quad B=47^{\circ} 40' 8'' \qquad \angle④⑩⑧$$

$$\operatorname{ctg} C=\operatorname{ctg} c \sin b=\operatorname{ctg} 63^{\circ} \sin 44^{\circ} 22'=0.356284$$

$$\therefore \quad C=70^{\circ} 23' 20'' \qquad \angle④⑧⑩$$

归纳一下就是：

$$\varepsilon=2\cdot\overset{\frown}{④⑧}=88^{\circ}44'$$

$$\varphi=2\cdot\angle④⑩⑧=95^{\circ}20'16''$$

$$\delta=\angle④⑧⑩=70^{\circ}23'20''$$

例二 见图 3-31，图（a）为前角等于 0°的三面刃铣刀，图（b）为柱面齿前角等15°的三面刃铣刀。铣刀的齿数均为18，刀齿刃带宽为一不变值，刀齿槽型角（前面与后面间的二面角）θ均为 70°。求铣制铣刀端面齿时的安装角φ。

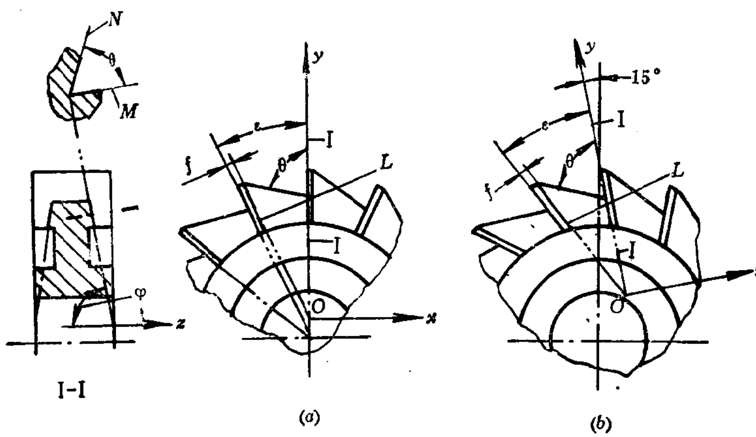


图 3-31

见图3-31，因为两种铣刀的齿数均为18，所以角 ε 均为20°。在（a）、（b）两图中，取坐标系 x、y、z，则此两铣刀在角度计算上是完全一样的。按坐标面xy作球面投影图，如图 3-32。图中点①、②、③分别表示坐标轴 x、y、z，大圆$\overset{\frown}{①②}$就是铣刀的端平面，大圆$\overset{\frown}{②③}$就是一刀齿的前面M。在大圆 $\overset{\frown}{①②}$ 上取

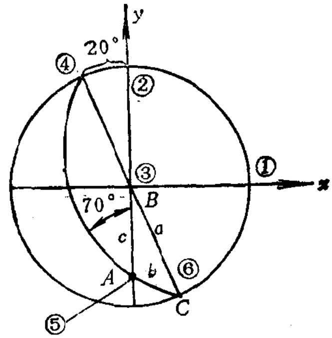


图 3-32

②④等于20°，得点④，则点④就表示另一刀齿的直线L。通过点④并按后面N的延长面的方位作大圆④⑤，使球面角③⑤④等于70°（θ）。则大圆④⑤就是后面N。大圆弧③⑤之长就是角ψ。此角可从△⑤③⑥中求出。为此，命△⑤③⑥为△ABC，在此三角形中，已知$a=90°$，$A=180°-70°=110°$，$B=20°$，求c。

据球面直边三角形公式，有：

$$\cos c=-\mathrm{tg}B\,\mathrm{ctg}A=-\mathrm{tg}20°\,\mathrm{ctg}110°=0.132474$$

$$\therefore\qquad c=82°23'20'' \qquad ③⑤$$

此角就是铣制端齿时的安装角φ。

例三 如图3-33所示的角铣刀，其齿数为18，锥角δ为30°，刀齿的槽型角θ为70°，求铣制刀齿时的安装角φ。

见图3-33，因为刀齿数为18，所以角ε等于20°。取坐标系x、y、z，并按坐标面xy作球面投影图，如图3-34。图中点①、②、③分别表示坐标轴x、y、z，大圆②③就表示一刀齿的前面M。在大圆①②上取②⑤等于20°，得点⑤。通过点③、⑤作大圆，则此大圆就是另一刀齿的前面N。在大圆③⑤上取③⑥等于30°，得点⑥，则此点就是后一刀齿的刃棱直线。通过点⑥作大圆⑥⑦，使球面角⑧⑦③等于70°，则此大圆就是后一刀齿的

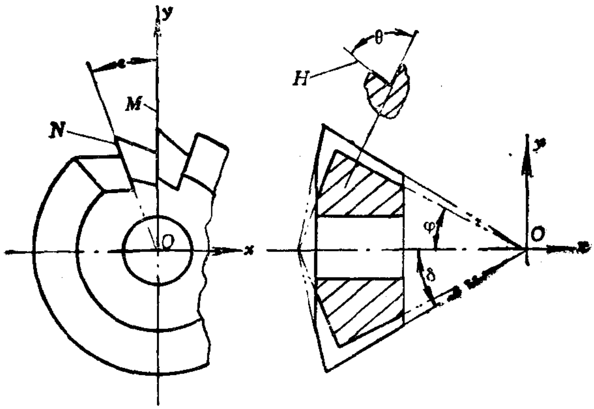


图 3-33

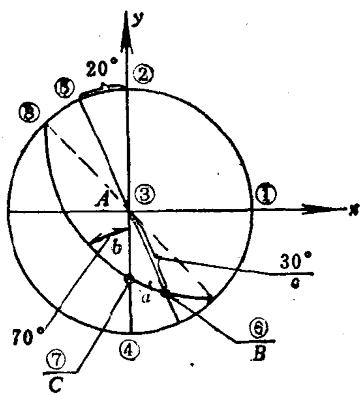


图 3-34

后面H。交点⑦就是平面M与H的交线，大圆弧$\overset{\frown}{③⑦}$之长就是铣制刀齿时的安装角ψ。此角可从△③⑥⑦中求出。命△⑧⑥⑦为△ABC，在此三角形中，已知$A=20°$，$C=180°-70°=110°$，$c=\overset{\frown}{③⑥}=30°$，求$b$。

据正弦定理有：

$$\sin a = \frac{\sin A}{\sin C}\ \sin c = \frac{\sin 20^\circ}{\sin 110^\circ}\sin 30^\circ = 0.181985$$

$$\therefore \qquad a = 10^\circ 29' 10'' \qquad \widehat{⑥⑦}$$

因为大角C的对边c小于90°，所以小角A的对边必小于90°，故a有上面唯一的解。

再据纳皮尔公式，有：

$$\operatorname{tg}\frac{b}{2} = \operatorname{tg}\frac{a+c}{2}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(A+C)}{\cos\frac{1}{2}(A-C)}$$

$$= \operatorname{tg}20^\circ 14' 35''\cdot\frac{\cos 65^\circ}{\cos(-45^\circ)} = 0.220411$$

$$\therefore \qquad \frac{b}{2} = 12^\circ 25' 50''$$

即
$$b = 24^\circ 51' 40'' \qquad \widehat{③⑦}$$

此角就是铣制刀齿时的安装角φ。

§ 3　在机加工艺工作中的应用

在机械加工车间，一般都有一些通用的转动工作台、正弦台、度钳及具有转角装置的机床设备等。运用这些通用工装和设备，就可以完成各种具有空间角度的零件的加工任务。图3-35和图3-36就是两种转动工作台的示意图。从转角关系上看，图3-35所示的转动工作台与单向正弦台上加一转盘相当；图3-36所示的转动工作台与双向正弦台左右件两种的总和相当。在转角范围足够的情况下，并仅从角度关系看，有一种就可以满足各种加工要求。

下面举几个例子，谈谈如何运用这两种转动工作台来完成一些加工任务。需要说明一点，当这两种转动工作台用在铣床上时，在某些场合下还需要在底面上增加一个转动机构。图中没有给出这一转动机构，以后遇到这种情况时，只说明在底面上应转的角度。

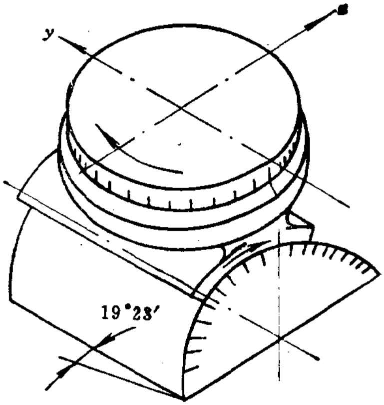


图 3-35

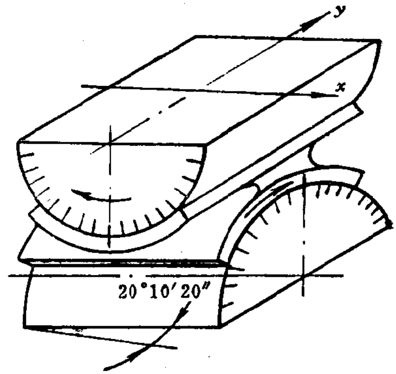


图 3-36

例一 见图3-37，要求以底面定位安装在上述两种转动工作台上铣斜面。

1．角度计算

见图3-37，取坐标系 x、y、z，并按坐标面 xy 作球面投影图，如图3-38。图中点①、②、③分别表示坐标轴 x、y、z，

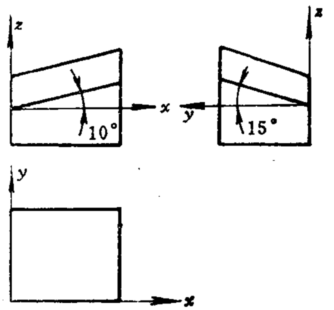


图 3-37

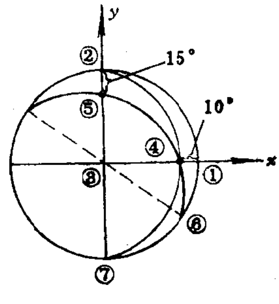


图 3-38

大圆$\widehat{①②}$就是底面的平行平面。在大圆$\widehat{①③}$上取$\widehat{①④}$等于10°，在大圆$\widehat{②③}$上取$\widehat{②⑤}$等于15°，分别得点④和⑤。显然，此两点就表示斜平面上的两条棱线。通过点④、⑤作大圆，则此大圆就是斜平面。再通过点②、④作大圆。若在图3-35转动工作台上加工，就需要转角$\widehat{①⑥}$和∠①⑥④；若在图3-36转动工作台上加工，就需要转角$\widehat{①④}$和∠⑥④⑦。这几个角度可从△③④⑤和△①④⑥中求出。为此，将这两个三角形取出并均命名为△ABC，如图3-39。

图 3-39

在△③④⑤中，已知$A=90^\circ$，$b=90^\circ-15^\circ=75^\circ$，$c=90^\circ-10^\circ=80^\circ$，求$B$。

据球面直角三角形公式，有：

$$\operatorname{ctg}B=\operatorname{ctg}b\sin c=\operatorname{ctg}75^\circ\sin80^\circ=0.263878$$

$$\therefore\quad B=75^\circ13' \qquad ∠③④⑤$$

在△①④⑥中，已知$A=90^\circ$，$B=∠③④⑤=75^\circ13'$，$c=10^\circ$，求C、b。

据球面直角三角形公式，有：

$$\cos C=\sin B\cos c=\sin75^\circ13'\cos10^\circ=0.952208$$

$$\therefore\quad C=17^\circ47'10'' \qquad ∠①⑥④$$

$$\operatorname{tg}b=\operatorname{tg}B\sin c=\operatorname{tg}75^\circ13'\sin10^\circ=0.658007$$

$$\therefore\quad b=33^\circ20'40'' \qquad \widehat{①⑥}$$

2．在转动工作台上的加工问题

上面求出了所需要的角度，下面就谈谈如何将零件安装在工作台上，工作台又应如何转角，才能加工出零件的斜面。

1）在图3-35所示的转动工作台上加工

零件以其底面放在转动工作台上，使二者的x轴平行且方向相同。上层转动装置沿箭头方向转56°39′20″（$\overset{\frown}{①⑥}$的余角），此时零件的斜面在其底面上的交线平行于下层转动装置的转轴。下层再沿箭头方向转17°47′10″（∠①⑥④），此时零件的斜面就平行于转动工作台的底面了，这样就可以进行加工了。

2）在图3-36所示的转动工作台上加工

零件以其底面放在转动工作台上，使二者的x轴平行且方向相同。上层转动装置沿箭头方向转10°（$\overset{\frown}{①④}$弧长），此时零件的10°棱线平行于下层转动装置的转轴。下层再沿箭头方向转14°47′（∠③④⑤的余角），此时零件的斜面就平行于转动工作台的底面了，这样就可以进行加工了。

例二 要求利用上述两种转动工作台，在图3-40所示的毛坯上画出斜叉口与斜孔中心线。

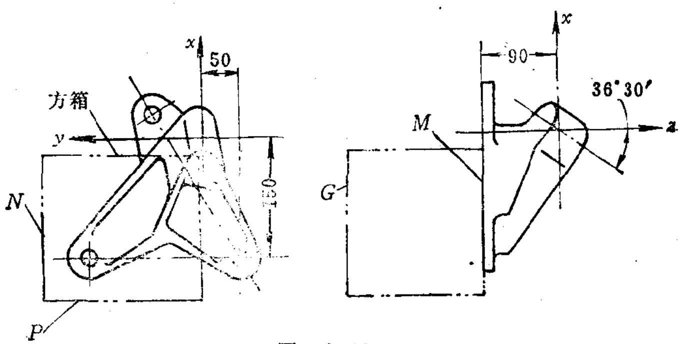


图 3-40

1．角度计算

在图3-6的基础上继续作图，如图3-41。通过点②、⑫和①、⑬及③、⑥作三个大圆。在图3-35所示的转动工作上，若画斜叉口的侧面线，应上层转$\overset{\frown}{②⑩}$，下层转∠②⑩⑨；若画斜叉口的底面线，应上层转$\overset{\frown}{②⑪}$，下层转∠②⑪⑧。在图3-36所示的转动工作台上，若画斜叉口的侧面线，应上层转$\overset{\frown}{①⑫}$，下层转∠②⑫⑨；

若画斜叉口的底面线，应上层转$\overset{\frown}{②⑬}$，下层转∠①⑬⑪。在这两种转动工作台上画斜孔中心的位置线时，都应转$\overset{\frown}{①⑭}$和∠⑧⑤④。

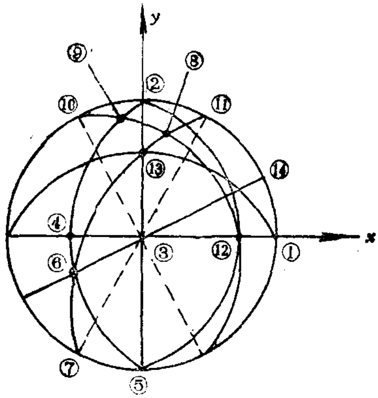


图 3-41

在§1的例二、例三中，已经知道：

$$\overset{\frown}{②⑩}=9°53'\text{（79页）}$$

$$∠②⑩⑨=36°54'40''\text{（80页）}$$

$$\overset{\frown}{②⑪}=\overset{\frown}{⑤⑦}=23°40'30''\text{（76页）}$$

$$∠②⑪⑧=180°-∠⑤⑦⑥\text{（75页）}=57°57'10''$$

$$∠③⑤④=36°30'\text{（由题已知）}$$

因为大圆$\overset{\frown}{⑫⑨}$和$\overset{\frown}{⑫④}$均垂直于大圆$\overset{\frown}{②④}$，所以点⑫是大圆$\overset{\frown}{②④}$的极，因此有：

$$∠②⑫⑨=\overset{\frown}{②⑨}=5°55'$$

$$\overset{\frown}{①⑫}=\overset{\frown}{①③}+\overset{\frown}{③④}-\overset{\frown}{④⑫}$$
$$=90°+36°30'-90°=36°30'$$

因为点⑥是大圆$\overset{\frown}{⑫⑨}$的极，即大圆$\overset{\frown}{③⑥}$垂直于大圆$\overset{\frown}{⑫⑨}$。又因为大圆$\overset{\frown}{⑫⑨}$和$\overset{\frown}{①②}$均垂直于大圆$\overset{\frown}{③⑥}$，所以点⑩是大圆$\overset{\frown}{③⑥}$的极，即$\overset{\frown}{⑩⑭}$长为90°。由此得：

$$\overset{\frown}{①⑭}=\overset{\frown}{①②}+\overset{\frown}{②⑩}-\overset{\frown}{⑩⑭}=9°53'$$

下面求$\overset{\frown}{②⑬}$和∠①⑬⑪。为了清楚，将△②⑪⑬取出，并命名为△ABC，如图 3-42。已知 $A=90°$，$B=57°57'10''$，$c=23°40'30''$，求b、C。

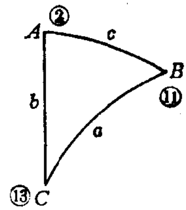


图 3-42

据球面直角三角形公式，有：

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} b &= \operatorname{tg} B \sin c\\ &= \operatorname{tg}57°57'10''\sin 23°40'30''\\ &= 0.641434\end{aligned}$$

∴ $$b=32°40'40'' \qquad \overset{\frown}{②⑬}$$

$$\cos C=\sin B\cos c=\sin 57°57'10''\cos 23°40'30''=0.776274$$

∴ $$C=39°04'50'' \qquad ∠②⑬⑪$$

从图3-41可得：

$$∠①⑬⑪=90°-∠②⑬⑪=50°55'10''$$

2. 在转动工作台上的画线

上面求出了所需要的转角，下面谈谈如何借助于方箱将零件安装在工作台上，工作台又应如何转角，才能画出所需要的加工线。

将零件固定在方箱上，如图3-40。以零件的M面固定在方箱上，按O_1、O_2的中心连线找正，即使中心线O_1O_2平行于方箱的P面。以P面放在平台上，画出150平面线；再以N面放在平台上，画出50平面线；最后以G面放在平台上，画出90平面线。为了以后叙述上的方便，这些线的交点命名为：

150平面线与50平面线的两交点为Ⅰ。

150平面线与90平面线的两交点为Ⅱ。

50平面线与90平面线的两交点为Ⅲ。

因为150、90、50这三个平面都通过斜叉口中心面与孔中心线的交点K（见图3-5），所以这三个平面相交所构成的直线Ⅰ－Ⅰ、Ⅱ－Ⅱ、Ⅲ－Ⅲ都通过点K。

在上面画线的基础上，将零件（连同已固定好的方箱）放在两种转动工作台上，进行画线。零件应如何安装在这两种转动工作台上，工作台又应如何转角才能画出所需要的加工线呢？

1）在图3-35所示的转动工作台上画线

i　画斜叉口侧面线

以方箱的P面放在转动工作台上，使零件的y轴与工作台的x轴平行且方向相反。下层转动装置沿箭头方向转9°53′（②⑩弧长），通过直线Ⅰ-Ⅰ画线，交90平面线于两个点Ⅳ。显然直线Ⅳ-Ⅳ就是斜叉口中心面与90平面线的交线。工作台回0°位置，再以方箱的G面放在转动工作台上，使二者的y轴平行且方向相同。上层转动装置沿箭头方向转9°53′，此时直线Ⅳ-Ⅳ平行于下层转动装置的转轴。下层沿箭头方向转36°54′40″（∠②⑩⑨），通过直线Ⅳ-Ⅳ画线。此线就是斜叉口侧面的中心面，以这个线高为基准，再分别升高和降低15mm画线，此两线就是斜叉口的两侧面线。

ii　画斜叉口底面线

工作台各层均回0°位置。以方箱的P面放在工作台上，使零件的y轴与工作台的x轴平行且方向相反。下层转动装置沿箭头相反的方向转23°40′30″（②⑪弧长），通过直线Ⅰ-Ⅰ画线，交90平面线于两个点Ⅴ。显然直线Ⅴ-Ⅴ就是通过点K且平行于叉口底面的平面与90平面的交线。工作台回0°位置，再以方箱的G面放在转动工作台上，使二者的y轴平行且方向相同。上层转动装置沿箭头的相反方向转23°40′30″，此时直线Ⅴ-Ⅴ平行于下层转动装置的转轴。下层沿箭头的相反方向转57°57′10″（∠②⑪⑧），通过直线Ⅴ-Ⅴ画线。此线就是通过点K且平行于叉口底面的平面线，以这个线高为基准，再降低40mm画线，此线就是斜叉口的底面线。

iii　画孔的中心线

工作台回0°位置。以方箱的P面放在工作台上，使二者的y轴平行且方向相同。下层沿箭头方向转36°30′（∠③⑤④），通过

直线Ⅱ-Ⅱ画线，命此线为Ⅵ。显然斜孔中心线在线Ⅵ的平面上。工作台回0°位置，再以方箱的N面放在工作台上，使二者的x轴平行且方向相同。下层转动装置沿箭头的相反方向转9°53′（①⑭弧长），通过直线Ⅰ-Ⅰ画线，命此线为Ⅶ。显然斜孔中心线又在线Ⅶ的平面上。故Ⅵ与Ⅶ两线的两交点间的直线就是斜孔中心线。

2）在图3-36所示的转动工作台上画线

i　画斜叉口侧面线

以方箱的G面放在工作台上，使二者的x轴平行且方向相同。上层转动装置沿箭头方向转36°30′（①⑫弧长），通过直线Ⅰ-Ⅰ画线，此线与50平面线的两个交点为Ⅷ。显然点K在直线Ⅷ-Ⅷ上。下层沿箭头方向转5°55′（∠②⑫⑨），通过直线Ⅷ-Ⅷ画线，此线就是斜叉口侧面的中心面。以此线高为准，再升高和降低15mm画线，此两线就是斜叉口的两侧面线。

ii　画斜叉口底面线

以方箱的G面放在工作台上，使零件的y轴与工作台的x轴平行且方向相同。上层沿箭头方向转32°40′40″（②⑬弧长），通过直线Ⅱ-Ⅱ画线，此线与150平面线的两个交点为Ⅸ。显然点K在直线Ⅸ-Ⅸ上。下层再沿箭头方向转50°55′10″（∠①⑬⑪），通过直线Ⅸ-Ⅸ画线，此线就是通过点K且平行于叉口底面的平面线。以此线高为基准，再降低40mm画线，此线就是斜叉口底面线。

iii　画孔的中心线

在此转动工作台上画斜孔的中心线，与上面的完全相同，这里不谈了。

例三　见图3-5，零件以M面固定在转动工作台上，铣斜叉口。

1．角度问题

见图3-41，要加工斜叉口，应使大圆⑦⑥（叉口底面的平行面）转至水平。此时大圆⑩⑨（叉口侧面的中心面）处于铅垂位置，走刀方向应平行于叉口侧面。为达到这种位置，在图3-35转

动工作台上加工时，应使上层转$\overset{\frown}{②⑪}$弧长，下层转∠②⑪⑧，转动工作台在机床工作台上转$\overset{\frown}{⑧⑪}$弧长；在图 3-36 转动工作台上加工时，应使上层转$\overset{\frown}{②⑬}$弧长，下层转∠①⑬⑪，转动工作台在机床工作台上转$\overset{\frown}{⑧⑬}$弧长。这些角度，除$\overset{\frown}{⑧⑬}$弧长以外，在前面各例中都已求出，即：

$$\overset{\frown}{②⑪}=23°40'30''\text{（105页）}$$
$$\angle ②⑪⑧=57°57'10''\text{（105页）}$$
$$\overset{\frown}{⑧⑪}=19°23'50''\text{（76页）}$$
$$\overset{\frown}{②⑬}=32°40'40''\text{（106页）}$$
$$\angle ①⑬⑪=50°55'10''\text{（106页）}$$

下面我们来求$\overset{\frown}{⑧⑬}$弧长。在上例的图3-42中继续求 a。

据球面直角三角形公式，有：

$$\operatorname{ctg} a=\operatorname{ctg} c\cos B=\operatorname{ctg}23°40'40''\cos57°57'10''$$
$$=1.210057$$

∴ $$a=39°34'10'' \qquad \overset{\frown}{⑪⑬}$$

从图3-41可得：

$$\overset{\frown}{⑧⑬}=\overset{\frown}{⑪⑬}-\overset{\frown}{⑧⑪}$$
$$=39°34'10''-19°23'50''=20°10'20''$$

2．在转动工作台上的加工问题

1）在图3-35转动工作台上加工

零件以M面固定在转动工作台上，使零件的y轴平行于工作台的y轴，且方向相同。上层沿箭头的相反方向转 23°40′30″（$\overset{\frown}{②⑪}$弧长），下层沿箭头的相反方向转 57°57′10″（∠②⑪⑧），走刀方向应沿19°23′50″ （$\overset{\frown}{⑧⑪}$） 所示直线的方向。

2）在图3-36转动工作台上加工

零件以M面固定在转动工作台上，使零件的y轴平行与工作台的x轴，且方向相同。上层沿箭头方向转32°40′40″（$\overset{\frown}{②⑬}$ 弧

长)，下层沿箭头方向转50°55′10″（∠①⑬⑪），走刀方向应沿20°10′20″（⑧⑬）所示直线的方向。

在以上的三个例子中，我们说明了如何在上述两种转动工作台上完成工作任务的一种方法。为了完成同样的工作任务，如被加工零件以不同的方位固定在转动工作台上，则工作台的转动情况和转角值都不同了。

例四 见图3-43，要求以P、N、G三面定位，铣H、S、M三平面。

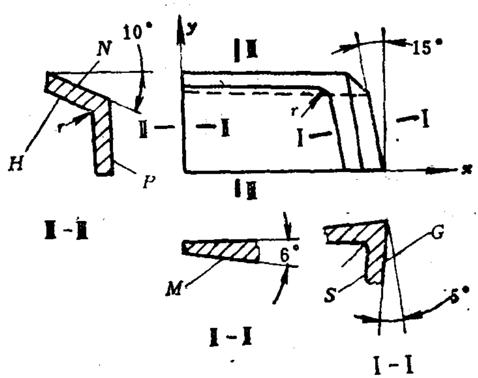


图 3-43

根据我们所具有的铣床设备情况，可采用不同的铣刀和机床转角的方法进行加工。但所需要的铣床夹具都是一样的。

1．铣床夹具的设计

零件装到夹具上之后，应使零件的M面平行于夹具底面，使H、M两面的交线平行于夹具底面上的键中心线。

1）角度计算

见图3-43，取坐标系x、y、z，平移平面M，使其通过坐标原点。按坐标面xy作球面投影图，如图3-44。图中点①、②、③分别表示坐标轴x、y、z；大圆①②和①④分别表示平面P和N；大圆②⑤就是平移后的平面M，也就是夹具底面的平行

面。则夹具的定位面P与底面构成一个6°的二面角(∠①②⑤)，点②又是二面角的交线。点①是N面在P面上的交线。点⑥是N面在夹具底面上的交线，也就是底面上的键中心线。大圆弧②⑥就是二面角的交线与键中心线的夹角。这个角度可从△④②⑥中取出。为此，命△④②⑥为△ABC。在此三角形中，已知$A=90°$，$B=90°-6°=84°$，$c=90°-10°=80°$，求a。

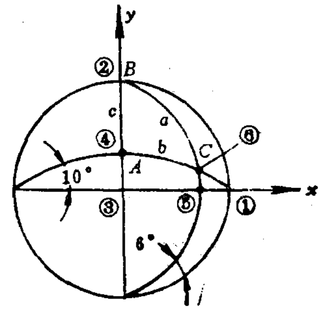


图 3-44

据球面直角三角形公式，有：

$$\operatorname{ctg} a=\operatorname{ctg} c\cos B=\operatorname{ctg}80°\cos84°=0.018431$$

∴ $$a=88°56'40''$$ ②⑥

为了后面的需要，再顺便求角c。据公式，有：

$$\cos c=\sin B\cos c=\sin84°\cos80°=0.172697$$

∴ $$C=80°03'20''$$ ∠②⑥④

2）夹具的简要结构

根据前面的计算结果，可得夹具的简要结构如图3-45。

2. 在不同铣床上的加工问题

在不同的铣床上加工该零件，都可采用上述夹具，但机床转角和铣刀结构是不同的。

1）在普通立式铣床上加工

这种铣床的主轴，一般都可在纵向铅垂平面上转一定的角度。它的工作台具有不可改变方向的纵横和铅垂走刀系统。

在这种铣床上加工，如果主轴不转角并采用一般棒铣刀，则H、S面都有剩余部分，有待于进一步加工。而剩余部分的加工，特别是三面交角处的加工是比较困难的。假如采用一个球头锥铣

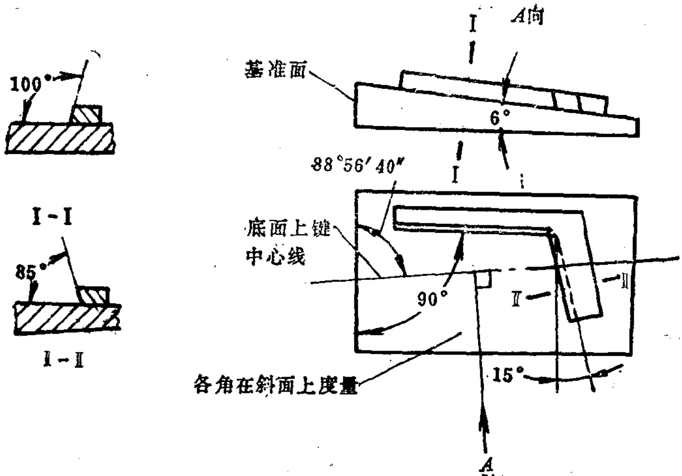


图 3-45

刀，并使铣床主轴转一适当的角度，使铣刀的锥面与H、S两面相切。这样，M、H、S三面就可都加工完毕，只有H、S两面交角处的圆角半径r是一个变化的。如果r的变化在零件要求的r的公差范围内，就不需要再加工了；如果r的变化超出了零件要求的r的公差范围，加工时可适当抬刀，将r处加工成台阶形式，然后适当打光。显然，这样加工是比较好的。但铣刀锥角和铣床主轴转角是怎样的呢？下面就来求这些角度。

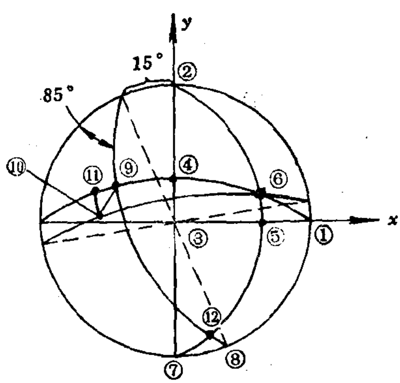


图 3-46

在图3-44的基础上继续作图，如图3-46。作表示平

移至通过坐标原点的平面G的大圆⑧⑨。因为大圆②⑤又同时表示铣床的工作台平面，点⑥又表示工作台的纵走刀方向线。通过点⑥作大圆⑥⑩，使∠②⑥⑩等于90°。则大圆⑥⑩就是铣床的一个纵向铅垂平面，即铣床主轴转角的转位平面。作球面角⑧⑨⑪的角分线⑨⑩，交大圆⑥⑩于点⑩。通过点⑩向大圆①④引垂直大圆弧⑩⑪，交大圆①④于点⑪。若以点⑩为球面中心，以大圆弧⑩⑪长为半径画小圆，则此小圆必与∠⑧⑨⑪的两边相切。所以，大圆弧⑩⑪之长就是锥铣刀的半锥角；点⑩就是锥铣刀的中心线，即铣床主轴的中心线。由此可知，大圆弧⑥⑩之长就是铣床主轴与工作台平面的夹角。这些角度可从△⑦⑧⑫、△⑥⑫⑨、△⑥⑨⑩和△⑪⑨⑩中逐步求出。为此，将这些三角形取出并均命名为△ABC，如图3-47。

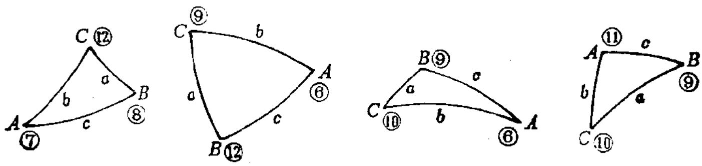


图 3-47

在△⑦⑧⑫中，已知$A=6^\circ$，$B=85^\circ$，$c=15^\circ$，求C、b。据球面三角形角的余弦定理，有：

$$\begin{aligned}\cos C&=-\cos A\cos B+\sin A\sin B\cos c\\&=-\cos6^\circ\cos85^\circ+\sin6^\circ\sin85^\circ\cos15^\circ\\&=0.013904\end{aligned}$$

$\therefore\quad C=89^\circ12'10''\qquad\qquad$ ∠⑦⑫⑧

据球面三角形的余切定理，有：

$$\begin{aligned}\operatorname{ctg} b&=\operatorname{ctg} c\cos A+\frac{\sin A\operatorname{ctg} B}{\sin c}\\&=\operatorname{ctg}15^\circ\cos6^\circ+\frac{\sin6^\circ\operatorname{ctg}85^\circ}{\sin15^\circ}\\&=3.746940\end{aligned}$$

∴ $$b=14^\circ 56'40''$$ ⑦⑫

在△⑥⑫⑨中，已知 $A=180^\circ-\angle$②⑥④ $=180^\circ-80^\circ03'20''=99^\circ56'40''$， $B=\angle$⑦⑫⑧ $=89^\circ12'10''$， $c=180^\circ-$ ②⑥ $-$ ⑦⑫ $=180^\circ-88^\circ56'40''-14^\circ56'40''=76^\circ06'40''$，求 C、a、b。

据球面三角形角的余弦定理，有：

$$\begin{aligned}\cos C&=-\cos A\cos B+\sin A\sin B\cos c\\&=-\cos 99^\circ56'40''\cos 89^\circ12'10''\\&\quad+\sin 99^\circ56'40''\sin 89^\circ12'10''\cos 76^\circ06'40''\\&=0.234008\end{aligned}$$

∴ $$C=76^\circ28'$$ ∠⑥⑨⑫

据纳皮尔公式，有：

$$\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}=\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}\operatorname{tg}\frac{c}{2}$$

$$\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}=\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}\operatorname{tg}\frac{c}{2}$$

将已知条件代入，得：

$$\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}=\frac{\cos 5^\circ22'15''}{\cos 94^\circ34'25''}\operatorname{tg}38^\circ03'20''=-9.774431$$

$$\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}=\frac{\sin 5^\circ22'15''}{\sin 94^\circ34'25''}\operatorname{tg}38^\circ03'20''=0.073510$$

∴ $$\frac{a+b}{2}=95^\circ50'30''$$

$$\frac{a-b}{2}=4^\circ12'20''$$

从而得：

$$a=\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}=100^\circ02'50''$$ ⑨⑫

$$b=\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}=91°38'10'' \qquad \overset{\frown}{⑥⑨}$$

在△⑥⑨⑩中，已知$A=90°-\angle$②⑥④$=90°-80°03'20''=9°56'40''$，$c=\overset{\frown}{⑥⑨}=91°38'10''$ $B=\frac{1}{2}(180°-\angle$⑥⑨⑫$)+\angle$⑥⑨⑫$=128°14'$，求$a$、$b$。

据纳皮尔公式，有：

$$\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}=\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}\operatorname{tg}\frac{c}{2}$$

$$\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}=\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}\operatorname{tg}\frac{C}{2}$$

代入已知条件，得：

$$\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}=\frac{\cos(-59°08'40'')}{\cos69°05'20''}\operatorname{tg}45°49'05''=1.478582$$

$$\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}=\frac{\sin(-59°08'40'')}{\sin69°05'20''}\operatorname{tg}45°49'05''=-0.945616$$

$$\therefore \quad \frac{a+b}{2}=55°55'40''$$

$$\frac{a-b}{2}=-43°24'$$

从而得：

$$a=\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}=12°31'40'' \qquad \overset{\frown}{⑨⑩}$$

$$b=\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}=99°19'40'' \qquad \overset{\frown}{⑥⑩}$$

在△⑪⑨⑩中，已知$A=90°$，$B=\frac{1}{2}(180°-\angle$⑥⑨⑫$)=51°46'$，$a=\overset{\frown}{⑨⑩}=12°31'40''$，求$b$。

据球面直角三角形公式，有：

$$\sin b = \sin a \sin B = \sin 12^\circ 31' 40'' \sin 51^\circ 46' = 0.170384$$

$$\therefore \qquad b = 9^\circ 48' 40'' \qquad \overset{\frown}{⑩⑪}$$

因为大角A的对边a小于90°，所以小角B的对边b必小于90°，故b有上面唯一的解。

现在，铣刀的半锥角（$\overset{\frown}{⑩⑪}$弧长）和铣床主轴的转角（$\overset{\frown}{⑥⑩}$弧长）都求出来了。夹具在铣床上的安装位置、铣刀锥角及主轴转角见图3-48。此图是在铣床纵向铅垂平面上的投影图，夹具的位置为图3-46的Ⅱ向视图的方位。

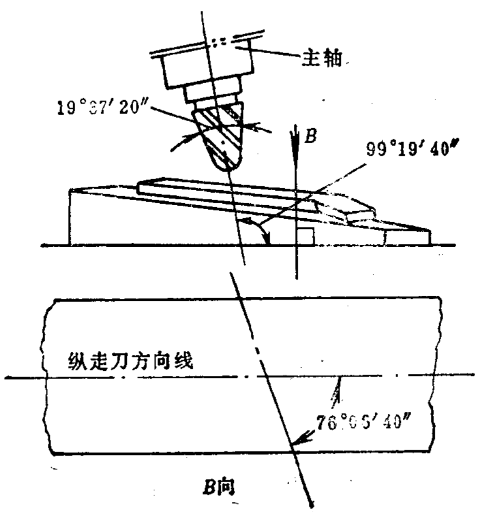


图 3-48

按图3-48的情况铣削零件时，H面为一次纵走刀加工而成，加工情况很好。而S面系为纵横走刀赶制而成，加工情况还不够理想。假如在铣床夹具底面上，沿M、S两面的交线方向加一走刀机构，用以代替加工S面时的纵横赶制走刀。则S面亦为一次走刀加工而成。夹具应在什么方向上加这一走刀机构呢？我们再来分析图3-46。前面已经讲了，点⑥是夹具底面上的键中心线，

即纵走刀的方向线；点⑫是M、S两面的交线，即将要增加的这一走刀机构的走刀方向线。大圆弧⑥⑫之长，就是此走刀方向线与键中心线的夹角。这个角度可由前面的计算结果求出，即：

⑥⑫＝180°－②⑥－⑦⑫＝76°06′40″

在图3-48之Ⅳ向视图的76°06′40″斜线方向上，增加一走刀机构是很简单的，这里不谈了。

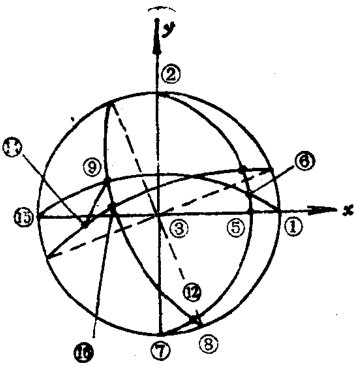
2）在卧式万能铣床上加工

这种铣床的工作台，具有不变方向的铅垂、横向走刀和可变方向的纵走刀机构。机床上的横梁退向后边之后，可以安装立铣头。立铣头有单向转角和双向转角的两种。具有单向转角的立铣头叫做一般立铣头，具有双向转角的立铣头叫做万能立铣头。下面分别谈谈，如何利用这两种立铣头在卧式万能铣床上加工该零件。

i　利用一般立铣头加工

这种立铣头装在铣床上后，主轴可在垂直于横向的铅垂平面上转角。用这种机床加工零件时，应使工作台的纵走刀方向转76°06′40″（⑥⑫弧长），从而使零件的M、S两面的交线平行于横走刀方向。这样，零件的H、S两面可分别由一次纵、横走刀铣削而成。但还必须有适当的锥铣刀与主轴转角相配合。下面来求铣刀锥角和主轴转角问题。

将图3-46的有关部分取出，如图3-49。据前所述，取点⑫、⑥作为横、纵走刀方向是理想的。再取⑫⑬等于90°，得点⑬。通过点⑬作垂直于大圆②⑤的大圆⑬⑭，则此大圆就是主轴转角的转位平面。通过点⑨作∠⑧⑨⑮的角分线⑨⑭，交大圆⑬⑭于点⑭，则点⑭就是铣刀的轴线。大圆弧⑬⑭之长就是铣刀轴线与工作台平面的夹角。因为⑫⑬之长和∠⑫⑬⑭均为90°，所以点⑫是大圆⑬⑭的极。据极与极线的性质可知，∠⑨⑯⑭等于90°，大圆弧⑬⑯之长等于∠⑥⑫⑨（89°12′10″）。大圆弧⑭⑯之长就



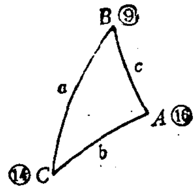


图 3-49　　　　图 3-50

是铣刀的半锥角。这个角度可从△⑯⑨⑭中求出。

将△⑯⑨⑭取出并命名为△ABC，见图3-50。已知$A=90^\circ$，$B=\dfrac{1}{2}(180^\circ-\angle⑥⑨⑫)=51^\circ46'$，$c=\overset{\frown}{⑨⑫}-\overset{\frown}{⑫⑯}=100^\circ02'50''-90^\circ=10^\circ02'50''$，求$b$。

据球面直角三角形公式，有：

$$\mathrm{tg}\,b=\mathrm{tg}\,B\sin c=\mathrm{tg}51^\circ46'\sin10^\circ02'50''=0.221434$$

$$\therefore\qquad b=12^\circ29'10''\qquad \overset{\frown}{⑭⑯}$$

从而得：$\overset{\frown}{⑬⑭}=\overset{\frown}{⑬⑯}+\overset{\frown}{⑭⑯}=101^\circ41'20''$

现在角度问题已全部解决。夹具在铣床工作台上的安装位置，应使夹具的键中心线平行于纵走刀方向。工作台纵走刀方向的转角、主轴转角和铣刀锥角见图3-51。

按图3-51的情况加工零件，H、S两面分别为一次纵、横走刀加工而成，加工情况较为理想。但同前一种加工方法相似，H、S两面交角处的圆角r是变化的。

ii　利用万能立铣头加工

这种立铣头装在铣床上后，主轴可在垂直于横向的铅垂平面上转角，又可在这个转位平面的垂直平面上转角。采用这种机构

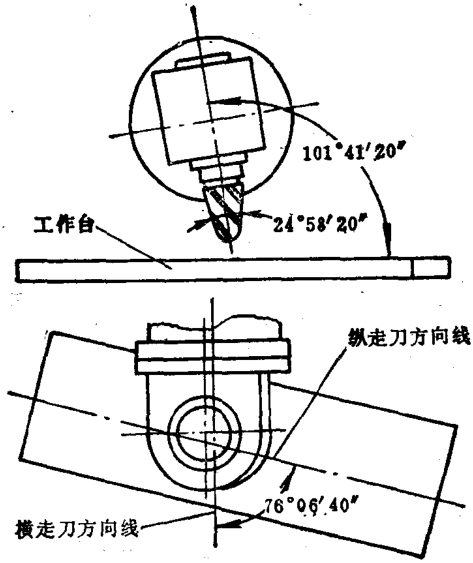


图 3-51

加工该零件时，夹具在铣床工作台上的安装位置和工作台纵向走刀机构的转角，都与一般立铣头的情况相同。主轴在两个方向上各转一适当的角度，就可使铣刀轴线同时平行于零件的H、S两平面，这样就可以用半径为r的球头棒铣刀来加工了。显然，用这种方法加工出来的零件，没有任何剩余部分，是很理想的。下面我们来求主轴的两个转角。

见图 3-49，根据它的作图过程可知，点⑨的向心直线就同时平行于零件的H、S两面，故点⑨就表示铣刀轴线。大圆弧$\overparen{⑬⑯}$就是铣头在垂直于横向的铅垂平面上的转角，大圆弧$\overparen{⑨⑯}$就是在另一平面上的转角。这两个角度，在前面都已求出，即：

$$\overparen{⑬⑯}=\angle⑥⑫⑨=89^\circ 12'10''$$

$$\overparen{⑨⑯}=\overparen{⑨⑫}-\overparen{⑫⑯}=100^\circ 02'50''-90^\circ=10^\circ 02'50''$$

夹具在铣床工作台上的安装位置和工作台纵走刀机构的转

角，与一般立铣头的情况完全相同，见图 3-51 。立铣头的转角情况见图 3-52 。

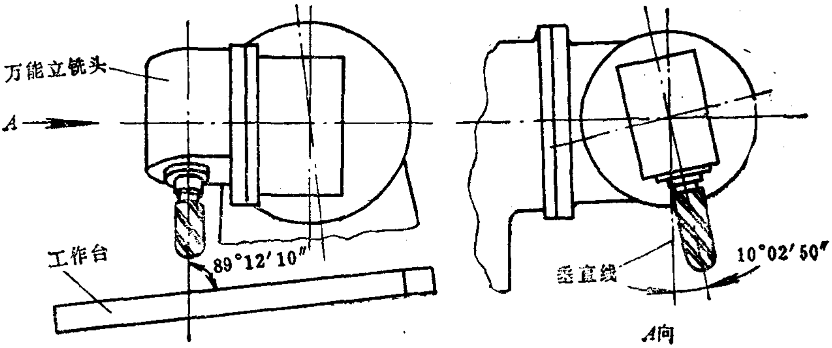


图 3-52

§4 在机械设计中的应用

例一 见图 3-53，根据某种要求，需在点K和T间连结一拉杆。在点K处设计一接头，使接头耳片中心面通过直线KT且平行于直线$I-I$。点K、T的位置如图所示。

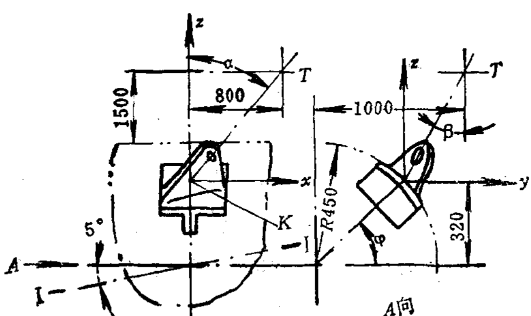


图 3-53

接头的简要结构如图 3-54 所示。从图可见，接头的构造是简单的，它的关键是角度计算问题。若求出角度 θ、φ、ε（图 3-54），则接头的设计问题就解决了。下面我们来求这些角度。

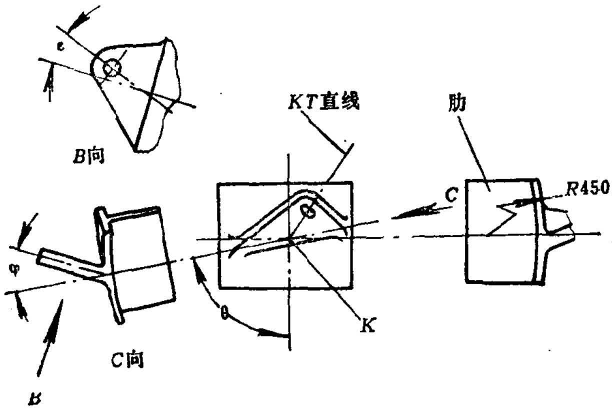


图 3-54

1. 将已知尺寸条件化为角度条件

见图 3-53，从图可得：

$$\varphi = \arcsin\frac{320}{450} = 45^\circ 19' 30''$$

$$\alpha = \mathrm{arctg}\frac{800}{1500+450-320} = 26^\circ 08' 30''$$

$$\beta = \mathrm{arctg}\frac{1000-450\cos\varphi}{1500+450-320} = 22^\circ 45' 10''$$

2. 求角度 θ、φ、ε

见图 3-53，取坐标系 x、y、z，并平移直线 $I-I$，使其通过原点。按坐标面 xz 作球面投影图，如图 3-55。图中点①、②、③分别表示坐标轴 x、y、z。大圆②③就是坐标面 yz，也就是接头的肋平面。在大圆①③上取③④等于 $26^\circ 08' 30''$（α），得点④。在大圆②③上取③⑤等于 $22^\circ 45' 10''$（β），得点⑤。通过点④、②和⑤、①作两个大圆，其交点⑥就表示直线 KT。在大

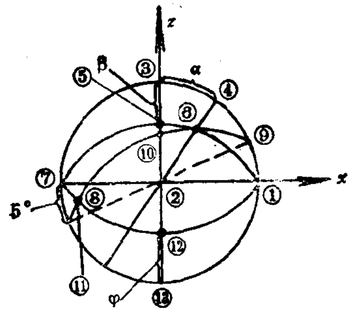


图 3-55

圆①③上取⑦⑧等于 5°，得点⑧，此点就表示平移后的直线 $I-I$。通过点⑥、⑧作大圆，则此大圆就是接头的耳片中心面。在大圆②③上取⑬⑫等于 45°19′30″(φ)，得点⑫。通过点①、⑫作大圆，则此大圆就表示通过点K且与R450 柱面相切的平面。从图可见，大圆弧⑪⑫就是角 θ；大圆⑥⑨的余角就是角 ε；球面角⑩⑪⑦的余角就是角 ψ。这些角度可从△⑤⑥②、△④⑥⑨、△③⑨⑩和△⑫⑪⑩中求出。为此，将这些三角形取出并均命名为△ABC，如图 3-56。

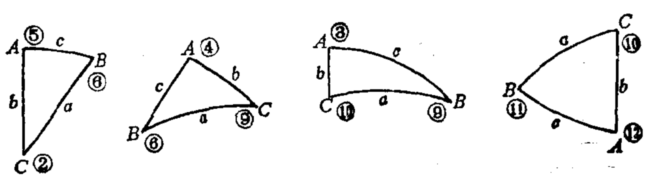


图 3-56

在△⑤⑥②中，已知 $A=90°$，$C=26°08'30''$，$b=90°-$ ③⑤ $=90°-22°45'10''=67°14'50''$，求 a。

据球面直角三角形公式，有：

$$\operatorname{ctg} a = \operatorname{ctg} b \cos c = \operatorname{ctg}67°14'50''\cos26°08'30''$$
$$=0.376491$$

$\therefore$ $$a = 69°22'10'' \qquad \overset{\frown}{②⑥}$$

在△④⑥⑨中，已知$A=90°$，$b=90°-\overset{\frown}{③④}-\overset{\frown}{①⑨}=90°-26°08'30''-5°=58°51'30''$，$c=90°-\overset{\frown}{②⑥}=90°-69°22'10''=20°37'50''$，求$a$、$c$。

据球面直角三角形公式，有：

$$\cos a = \cos b \cos c = \cos58°51'30''\cos20°37'50'' = 0.483992$$
$$\operatorname{ctg} C = \operatorname{ctg} c \sin b = \operatorname{ctg}20°37'50''\sin58°51'30'' = 2.273380$$

$\therefore$ $$a = 61°03'10'' \qquad \overset{\frown}{⑥⑨}$$
$$C = 23°44'40'' \qquad \angle④⑨⑥$$

在△③⑨⑩中，已知$A=90°$，$B=\angle④⑨⑥=23°44'40''$，$c=90°-\overset{\frown}{①⑨}=85°$，求$C$、$b$。

据面球直角三角形公式，有：

$$\cos C = \sin B \cos c = \sin23°44'40''\cos85° = 0.035094$$
$$\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} B \sin c = \operatorname{tg}23°44'40''\sin85° = 0.438221$$

$\therefore$ $$C = 87°59'20'' \qquad \angle③⑩⑨$$
$$b = 23°39'50'' \qquad \overset{\frown}{③⑩}$$

在△⑫⑪⑩中，已知$A=90°$，$C=\angle③⑩⑨=87°59'20''$，$b=180°-\overset{\frown}{⑬⑫}-\overset{\frown}{③⑩}=111°0'40''$，求$B$、$c$。

据球面直角三角形公式，有：

$$\cos B = \sin C \cos b = \sin87°59'20''\cos111°0'40''$$
$$=-0.358328$$

$$\operatorname{tg} c = \operatorname{tg} C \sin b = \operatorname{tg}87°59'20''\sin111°0'40'' = 26.584443$$

$\therefore$ $$B = 110°59'50'' \qquad \angle⑩⑪⑫$$
$$c = 87°50'50'' \qquad \overset{\frown}{⑪⑫}$$

从上面的计算结果，得：

$$\theta = \overset{\frown}{⑪⑫} = 87°50'50''$$

$$\varphi=\angle⑩⑪⑫-90^{\circ}=20^{\circ}59'50''$$

$$\varepsilon=90^{\circ}-\overset{\frown}{⑥⑨}=28^{\circ}56'50''$$

例二 根据某种工作要求，需要设计一个如图 3-57 所示的构件，其尺寸见图。板片与环圈焊接起来成为构件 1 。两根钢管与三个接头焊接起来成为构件 2 。构件 1 和构件 2 用螺钉螺帽连接起来，构成所需要的部件。

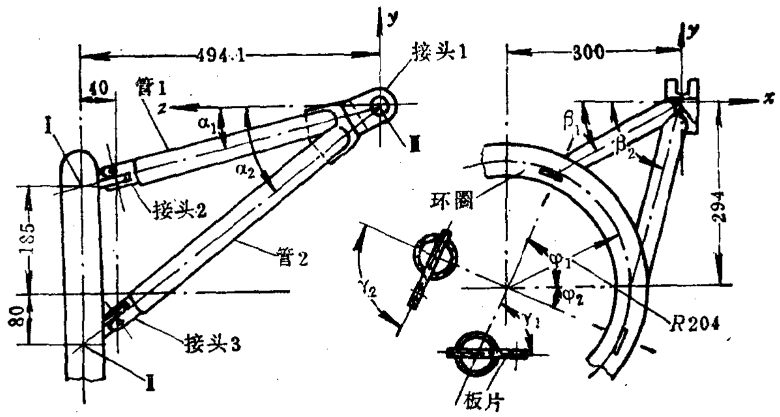


图 3-57

构件 1 根据受力情况，要求板片中心面分别通过 R 2041 圆周之点Ⅰ、Ⅱ的切线，又分别通过直线Ⅰ-Ⅱ和Ⅱ-Ⅱ。其结构如图 3-58 所示。求角度 γ_1、γ_2、θ_1、θ_2 和尺寸 L_1、L_2。

构件 2 根据受力情况，要求两钢管中心线分别重合于直线Ⅰ-Ⅱ和Ⅱ-Ⅱ。接头 1 以其板片插入两钢管的开口中并焊接起来；接头 2 和 3 分别以其柱面插入两钢管的孔中并焊接起来。为了绘图和制造方便，以两钢管中心线所构成的平面为基准面，向这个基准面投影作图。这就需要求出两钢管中心线间的夹角及三个接头叉口平面的方位角。构件 2 的简要结构见图 3-58 。求角度 ε、φ、γ_3、γ_4、γ_5 和尺寸 L_3、L_4。

1. 将已知尺寸条件化为角度条件

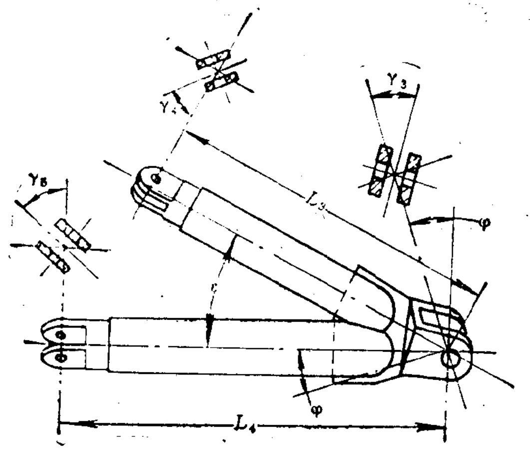


图 3-58

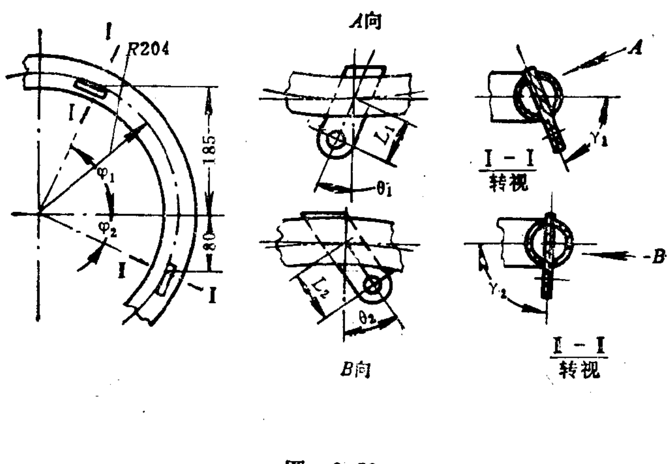


图 3-59

见图 3-57 和图 3-59，从图可得：

$$\varphi_1=\arcsin\frac{185}{204}=65^\circ04'30''$$

$$\varphi_2=\arcsin\frac{80}{204}=23^\circ05'20''$$

$$\alpha_1=\operatorname{arctg}\frac{294-185}{494.1}=12^\circ26'30''$$

$$\alpha_2=\operatorname{arctg}\frac{294+80}{494.1}=37^\circ07'20''$$

$$\beta_1=\operatorname{arctg}\frac{294-185}{300-204\cos\varphi_1}=26^\circ59'20''$$

$$\beta_2=\operatorname{arctg}\frac{294+80}{300-204\cos\varphi_2}=73^\circ16'50''$$

2. 求构件 1 和 2 所需要的各角

见图 3-57，取坐标系 x、y、z，平移各有关直线，使其均通过坐标原点。按坐标面 xy 作球面投影图，如图 3-60。图中

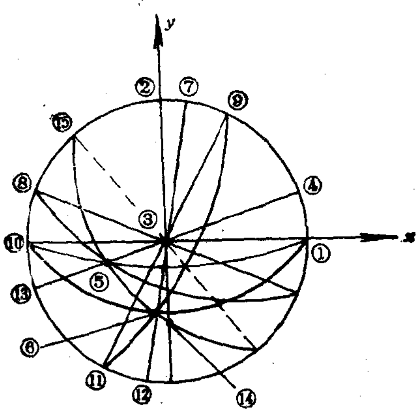


图 3-60

点①、②、③分别表示坐标轴 x、y、z。大圆$\overset{\frown}{①②}$就是坐标面 xy，同时也表示平移后环圈圆的所在平面。在大圆$\overset{\frown}{①②}$上取$\overset{\frown}{①④}$等于 $26^\circ59'20''$ (β_1)、取$\overset{\frown}{①⑦}$等于 $73^\circ16'50''$ (β_2)，得点④和⑦。

通过点④、③和⑦、③作两个大圆。通过点①作两个大圆①⑤和①⑥，使∠③①⑤等于 $12°26'30''(\alpha_1)$、∠③①⑥等于 $37°07'20''(\alpha_2)$。交点⑤和⑥就分别表示直线Ⅰ-Ⅱ和Ⅰ-Ⅲ，也就是钢管1和钢管2的中心线。通过点⑤、⑥作大圆，则此大圆就表示两钢管中心线所构成的平面。在大圆①②上取②⑧等于 $65°04'30''(\varphi_1)$、取②⑨等于 $23°05'20''(\varphi_2)$，得点⑧、⑨，则此两点就分别表示图3-57中的通过点Ⅰ、Ⅱ且切于 $R204$ 圆周的两切线。通过点⑧、⑤和⑨、⑥作两个大圆，则此两大圆就分别表示接头2、3的叉口中心面。而大圆②③就是坐标面 yz，也就是接头1的叉口中心面。从作图过程可知：∠⑤⑧⑩、∠⑥⑪⑫、∠③⑭⑥、∠⑧⑤⑮、∠⑪⑥⑭分别为角 γ_1、γ_2、γ_3、γ_4、γ_5；大圆弧⑤⑧、⑥⑪分别为角 θ_1、θ_2 的余角；大圆弧⑤⑥、⑥⑭分别为角 ε、φ。这些角度可从△⑤③⑩、△⑥③⑩、△⑤⑥③、△⑤③⑧、△⑥③⑪、△⑥③⑭中求出。将这些三角形取出并均命名为△ABC，如图3-61。

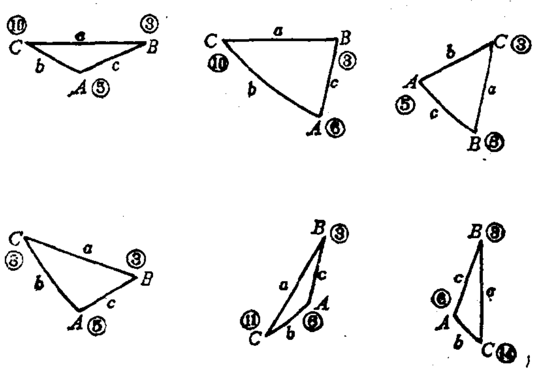


图 3-61

在△⑤③⑩中，已知 $a=90°$，$B=$①④$=26°59'20''$，$C=$∠③①⑤$=12°26'30''$，求 c、A。

据球面直边三角形公式，有：

$$\operatorname{ctg} c=\operatorname{ctg} C \sin B=\operatorname{ctg} 12^{\circ} 26' 30'' \sin 26^{\circ} 59' 20''=2.056948$$

$$\therefore \quad c=25^{\circ} 55' 40'' \qquad \overparen{③⑤}$$

$$\cos A=-\cos B \cos C=-\cos 26^{\circ} 59' 20'' \cos 12^{\circ} 26' 30''$$
$$=-0.870168$$

$$\therefore \quad A=150^{\circ} 28' 40'' \qquad \angle ③⑤⑩$$

在△⑥③⑩中，已知 $a=90^{\circ}$，$B=\overparen{①⑦}=73^{\circ}16'50''$，$C=\angle③①⑥=37^{\circ}07'20''$，求 c、A。

据球面直边三角形公式，有

$$\operatorname{ctg} c=\operatorname{ctg} C \sin B=\operatorname{ctg} 37^{\circ} 07' 20'' \sin 73^{\circ} 16' 50''=1.265319$$

$$\therefore \quad c=38^{\circ} 19' 10'' \qquad \overparen{③⑥}$$

$$\cos A=-\cos B \cos C=-\cos 73^{\circ} 16' 50'' \cos 37^{\circ} 07' 20''$$
$$=-0.229386$$

$$\therefore \quad A=103^{\circ} 15' 40'' \qquad \angle ③⑥⑩$$

在△⑤⑥③中，已知 $a=\overparen{③⑥}=38^{\circ}19'10''$，$b=\overparen{③⑤}=25^{\circ}55'40''$，$C=\overparen{①⑦}-\overparen{①④}=46^{\circ}17'30''$，求 A、B、c。

据纳皮尔公式，有：

$$\operatorname{tg} \frac{A+B}{2}=\frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2}(a+b)} \operatorname{ctg} \frac{C}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{A-B}{2}=\frac{\sin \frac{1}{2}(a-b)}{\sin \frac{1}{2}(a+b)} \operatorname{ctg} \frac{C}{2}$$

将已知条件代入，得：

$$\operatorname{tg} \frac{A+B}{2}=\frac{\cos 6^{\circ} 11' 45''}{\cos 32^{\circ} 7' 25''} \operatorname{ctg} 23^{\circ} 08' 45''=2.746024$$

$$\operatorname{tg} \frac{A-B}{2}=\frac{\sin 6^{\circ} 11' 45''}{\cos 32^{\circ} 7' 25''} \operatorname{ctg} 23^{\circ} 08' 45''=0.474796$$

$$\therefore \qquad \frac{A+B}{2}=69^\circ 59' 30''$$

$$\frac{A-B}{2}=25^\circ 23' 50''$$

从而得：

$$A=\frac{A+B}{2}+\frac{A-B}{2}=95^\circ 23' 20'' \qquad \angle③⑤⑥$$

$$B=\frac{A+B}{2}+\frac{A-B}{2}=44^\circ 35' 40'' \qquad \angle③⑥⑤$$

据球面三角形边的余弦定理，有：

$$\begin{aligned}\cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos c \\ &= \cos 38^\circ 19' 10'' \cos 25^\circ 55' 40'' \\ &\quad + \sin 38^\circ 19' 10'' \sin 25^\circ 55' 40'' \cos 46^\circ 17' 30'' \\ &= 0.892928\end{aligned}$$

$$\therefore \qquad c=26^\circ 45' 20'' \qquad ⑤⑥$$

在△⑤③⑧中，已知 $a=90^\circ$，$B=$①④$+(90^\circ-$②⑧$)=51^\circ 54' 50''$，$c=$③⑤$=25^\circ 55' 40''$，求A、C、b。

据球直边三角形公式，有：

$$\begin{aligned}\mathrm{ctg} A &= -\mathrm{ctg} B \cos c = -\mathrm{ctg} 51^\circ 54' 50'' \cos 25^\circ 55' 40'' \\ &= -0.704825\end{aligned}$$

$$\mathrm{tg}\, c = \mathrm{tg}\, c \sin B = \mathrm{tg} 25^\circ 55' 40'' \sin 51^\circ 54' 50'' = 0.382659$$

$$\cos b = \sin c \cos B = \sin 25^\circ 55' 40'' \cos 51^\circ 54' 50'' = 0.269708$$

$$\therefore \qquad A=125^\circ 10' 40'' \qquad \angle③⑤⑧$$

$$C=20^\circ 56' 20'' \qquad \angle③⑧⑤$$

$$b=74^\circ 21' 10'' \qquad ⑤⑧$$

在△⑥③⑪中，已知 $a=90^\circ$，$B=$②⑨$-(90^\circ-$①⑦$)=6^\circ 22' 10''$，$c=$③⑥$=38^\circ 19' 10''$，求A、C、b。

据球面直边三角形公式，有：

$$\operatorname{ctg} A = -\operatorname{ctg} B \cos c = -\operatorname{ctg} 6°22'10'' \cos 38°19'10''$$
$$= 7.028398$$

$$\operatorname{tg} c = \operatorname{tg} c \sin B = \operatorname{tg} 38°19'10'' \sin 6°22'10'' = 0.087675$$

$$\cos b = \sin c \cos B = \sin 38°19'10'' \cos 6°22'10'' = 0.616218$$

∴ $A = 171°54'10''$ ∠③⑥⑪

$C = 5°0'40''$ ∠③⑪⑥

$b = 51°57'30''$ ⑥⑪

在△⑥③⑭中，已知 $A = 180° -$ ∠③⑥⑤ $= 135°24'20''$，$B = 90° -$ ①⑦ $= 16°43'10''$，$c =$ ③⑥ $= 38°19'10''$，求 a、b、C。

据纳皮尔公式，有：

$$\operatorname{tg}\frac{a+b}{2} = \frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}\operatorname{tg}\frac{c}{2}$$

$$\operatorname{tg}\frac{a-b}{2} = \frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}\operatorname{tg}\frac{c}{2}$$

将已知条件代入，得：

$$\operatorname{tg}\frac{a+b}{2} = \frac{\cos 59°20'35''}{\cos 76°3'45''}\operatorname{tg} 19°09'35'' = 0.735533$$

$$\operatorname{tg}\frac{a-b}{2} = \frac{\sin 59°20'35''}{\sin 76°3'45''}\operatorname{tg} 19°09'35'' = 0.307821$$

∴
$$\frac{a+b}{2} = 36°20'10''$$

$$\frac{a-b}{2} = 17°06'30''$$

从而得：

$$a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} = 53°26'40''$$ ③⑭

$$b = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2} = 19°13'40''$$ ⑥⑭

据球面三角形角的余弦定理，有：

$$\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c$$

$$= -\cos 135^\circ 24' 20'' \cos 16^\circ 43' 10''$$

$$+ \sin 135^\circ 24' 20'' \sin 16^\circ 43' 10'' \cos 38^\circ 19' 10''$$

$$= 0.840456$$

∴ $C = 32^\circ 48' 40''$ $\angle$③⑭⑥

将上面的计算结果归纳一下，得：

$\gamma_1 = \angle$⑤⑧⑩ $= 90^\circ - \angle$③⑧⑤ $= 69^\circ 03' 40''$

$\gamma_2 = \angle$⑥⑪⑫ $= 90^\circ - \angle$⑧⑪⑥ $= 84^\circ 59' 20''$

$\gamma_3 = \angle$③⑭⑥ $= 32^\circ 48' 40''$

$\gamma_4 = \angle$⑧⑤⑮ $= \angle$③⑤⑧ $- (180^\circ - \angle$③⑤⑥$) = 40^\circ 34'$

$\gamma_5 = \angle$⑪⑥⑭ $= \angle$③⑥⑤ $+ (180^\circ - \angle$③⑥⑪$) = 52^\circ 41' 30''$

$\theta_1 = 90^\circ - \overset{\frown}{\text{⑤⑧}} = 15^\circ 38' 50''$

$\theta_2 = 90^\circ - \overset{\frown}{\text{⑥⑪}} = 38^\circ 02' 30''$

$\varepsilon = \overset{\frown}{\text{⑤⑥}} = 26^\circ 45' 20''$

$\psi = \overset{\frown}{\text{⑥⑭}} = 19^\circ 13' 40''$

3．求构件 1 和 2 所需要的各尺寸

见图 3-57，令点 Ⅰ、Ⅱ间的距离为 $L_{\mathrm{I\,II}}$，点Ⅰ、Ⅱ间的距离为 L_{II}，根据两点间的距离公式，有：

$$L_{\mathrm{I\,II}} = \sqrt{494.1^2 + (294 - 185)^2 + (300 - 204\cos\varphi_1)^2}$$

$$= 549.385$$

$$L_{\mathrm{II}} = \sqrt{494.1^2 + (294 + 80)^2 + (300 - 204\cos\varphi_2)^2}$$

$$= 629.787$$

根据定比分点关系，可得：

$$L_1 = L_{\mathrm{I\,II}} \cdot \frac{40}{494.1} = 44.476$$

$$L_2 = L_{\mathrm{II}} \cdot \frac{40}{494.1} = 50.985$$

$$L_3=L_{11}-L_1=504.909$$

$$L_4=L_{11}-L_2=578.802$$

现在，构件 1 和 2 的主要角度和尺寸都求出来了。

例三 图 3-62 为一个由平面 1 ～ 6 构成的多面体。要求在平面 2 处设计一框架。这就需要求出这个平面的外形（如图 3-63）以及此面与各相邻平面间的二面角。

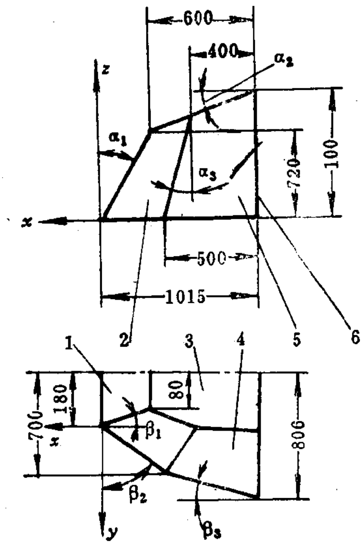


图 3-62

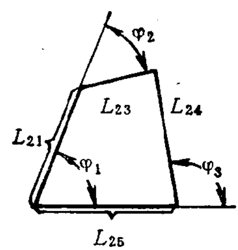


图 3-63

为了以后叙述上的方便，我们分别以 L_{21}、L_{23}、L_{24}、L_{25} 分别表示平面 2 和 1 、 2 和 3 、 2 和 4 、 2 和 5 的交线长；分别以 φ_{21}、φ_{23}、φ_{24}、φ_{25} 分别表示平面 2 和 1 、 2 和 3 、 2 和 4 、 2 和 5 的夹角（多面体内侧夹角）。

1. 将已知的尺寸条件化为角度条件

从图 3-62 可得：

$$\alpha_1=\operatorname{arctg}\frac{1015-600}{720}=29^\circ 57' 30''$$

$$\alpha_2=\operatorname{arctg}\frac{1000-720}{600}=25^\circ 01'$$

$$\alpha_3=\operatorname{arctg}\frac{500-400}{720+(600-400)\operatorname{tg}\alpha_2}=7^\circ 0' 30''$$

$$\beta_1=\operatorname{arctg}\frac{180-80}{1015-600}=13^\circ 32' 50''$$

$$\beta_2=\operatorname{arctg}\frac{1015-500}{700-180}=44^\circ 43' 20''$$

$$\beta_3=\operatorname{arctg}\frac{806-700}{500}=11^\circ 58' 10'$$

2. 求图 3-63 所需要的角度

见图 3-62，取坐标轴 x、y、z，并平移各平面，使其均通过坐标原点。按坐标面 xy 作球面投影图，如图 3-64。图中点①、②、③分别表示坐标轴 x、y、z。保证图示角度 α_1、α_2、α_3 作

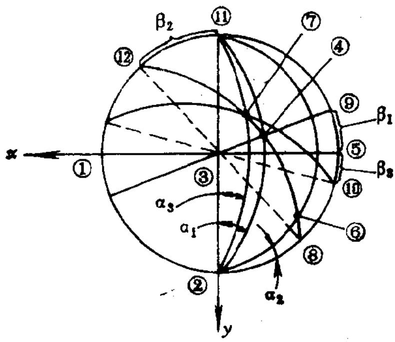


图 3-64

大圆②④、②⑥、②⑦。显然，大圆②④和②⑧就分别表示平面 1 和 5；大圆②⑥就是平移后的平面 3；大圆②⑦就是通过 L_{24} 棱线又平行于 y 轴的平面的平行平面（通过原点）。在大圆①②上，取②⑧弧长为 β_2；取⑤⑨弧长为 β_1；取⑤⑩弧长为 β_3。得点⑧、⑨、⑩。显然，点⑧就是直线 L_{25}；点⑨就是直线 L_{21} 在 xy 面上的投影直线；点⑩就是平移后的直线 L_{45}。通过点③、⑨作大圆，交大圆②④于点④，则点④就是直线 L_{21}。通过点④、⑧作大圆，则此大圆就是平面 2。大圆④⑧

交大圆②⑦于点⑦，则点⑦就是平移后的直线 L_{24}。通过点⑦、⑩作大圆，则此大圆就是平移后的平面 4。大圆④⑧与大圆②⑥的交点⑥就是平移后的直线 L_{23}。从图可见，大圆弧④⑧就是 L_{21} 与 L_{25} 的夹角（φ_1）；大圆弧④⑥就是 L_{21} 与 L_{23} 的夹角（φ_2）；大圆弧⑦⑧就是 L_{24} 与 L_{25} 的夹角（φ_3）；球面角⑧④⑪就是 φ_{21}；球面角⑧⑥⑪就是 φ_{23}；球面角⑩⑦⑫就是 φ_{24}；球面角⑩⑧⑦就是 φ_{25}。这些角度可从△④③②、△④②⑧、△⑥②⑧、△⑦②⑧和△⑦⑧⑩中求出。为此，我们将这些三角形取出并均命名为△ABC，见图 3-65。

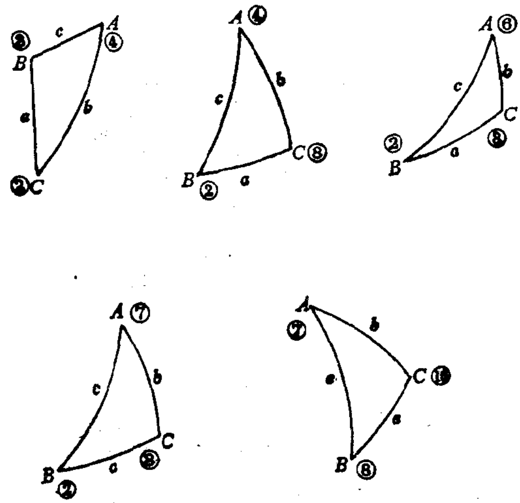


图 3-65

在△④③②中，已知 $a=90^\circ$，$B=90^\circ+\beta_1=103^\circ32'50''$，$C=\alpha_1=29^\circ57'30''$，求 b。

据球面直边三角形公式，有：

$$\operatorname{ctg} b=\sin c\operatorname{ctg} B=\sin 29^\circ57'30''\operatorname{ctg}103^\circ32'50''$$
$$=-0.120324$$

$$\therefore \quad b=96^\circ51'40'' \qquad ②④$$

在△④②⑧中，已知$B=90^\circ-\alpha_1=60^\circ02'30''$，$a=\beta_2=44^\circ43'20''$，$c=96^\circ51'40''$，求$A$、$C$、$b$。

据纳皮尔公式，有：

$$\mathrm{tg}\frac{A+C}{2}=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-c)}{\cos\frac{1}{2}(a+c)}\mathrm{ctg}\frac{B}{2}$$

$$\mathrm{tg}\frac{A-C}{2}=\frac{\sin\frac{1}{2}(a-c)}{\sin\frac{1}{2}(a+c)}\mathrm{ctg}\frac{B}{2}$$

代入已知条件，得：

$$\mathrm{tg}\frac{A+C}{2}=\frac{\cos(-26^\circ04'10'')}{\cos70^\circ47'30''}\mathrm{ctg}30^\circ01'15''=4.724957$$

$$\mathrm{tg}\frac{A-C}{2}=\frac{\sin(-26^\circ04'10'')}{\sin70^\circ47'30''}\mathrm{ctg}30^\circ01'15''=-0.805364$$

∴
$$\frac{A+C}{2}=78^\circ03'$$

$$\frac{A-C}{2}=-38^\circ50'50''$$

从而得：
$$A=\frac{A+C}{2}+\frac{A-C}{2}=39^\circ12'10'' \qquad \angle②④⑧$$

$$C=\frac{A+C}{2}-\frac{A-C}{2}=116^\circ53'50'' \qquad \angle②⑧④$$

据球面三角形边的余弦定理，有：

$$\begin{aligned}\cos b&=\cos c\cos a+\sin c\sin a\cos B\\&=\cos96^\circ51'40''\cos44^\circ43'20''\\&\quad+\sin96^\circ51'40''\sin44^\circ43'20''\cos60^\circ02'30''\\&=0.263994\end{aligned}$$

∴
$$b=74^\circ41'30'' \qquad \overset{\frown}{④⑧}$$

在△⑥②⑧中，已知$B=\alpha_2=25^\circ01'$，$C=\angle②⑧④=116^\circ53'50''$，$a=\beta_2=44^\circ43'20''$，求$A$、$b$。

据球面三角形角的余弦定理，有：

$$\cos A=-\cos B\cos C+\sin B\sin C\cos a$$
$$=-\cos 25^\circ 1'\cos 116^\circ 53'50''$$
$$+\sin 25^\circ 01'\sin 116^\circ 53'50''\cos 44^\circ 43'20''$$
$$=0.677914$$

∴ $$A=47^\circ 19'10'' \qquad \angle②⑥⑧$$

据正弦定理，有：

$$\sin b=\frac{\sin a}{\sin A}\sin B=\frac{\sin 44^\circ 43'20''}{\sin 47^\circ 19'10''}\sin 25^\circ 01'$$

∴ $$b=23^\circ 52'40'' \qquad \overset{\frown}{⑥⑧}$$

因为大角A的对边a小于90°，故小角B的对边b必小于90°。所以b有上面唯一的解。

在△⑦②⑧中，已知$B=90^\circ-\alpha_3=82^\circ 59'30''$，$C=116^\circ 53'50''$，$a=44^\circ 43'20''$，求$b$。

据余切定理，有：

$$\operatorname{ctg} b=\frac{\operatorname{ctg} B\sin C}{\sin a}+\operatorname{ctg} a\cos C$$
$$=\frac{\operatorname{ctg} 82^\circ 59'30''\sin 116^\circ 53'50''}{\sin 44^\circ 43'20''}$$
$$+\operatorname{ctg} 44^\circ 43'20''\cos 116^\circ 53'50''$$
$$=-0.300999$$

∴ $$b=106^\circ 45'10'' \qquad \overset{\frown}{⑦⑧}$$

在△⑦⑧⑩中，已知$a=90^\circ-\beta_2-\beta_3=33^\circ 18'30''$，$c=\overset{\frown}{⑦⑧}=106^\circ 45'10''$，$B=180^\circ-\angle②⑧④=63^\circ 06'10''$，求$A$。

据余切定理，有：

$$\operatorname{ctg} A=\frac{\operatorname{ctg} a\sin c}{\sin B}-\cos c\operatorname{ctg} B$$
$$=\frac{\operatorname{ctg} 33^\circ 18'30''\sin 106^\circ 45'10''}{\sin 63^\circ 06'10''}$$
$$-\cos 106^\circ 45'10''\operatorname{ctg} 63^\circ 06'10''=1.780267$$

$$\therefore \qquad A=29^\circ 19' 30'' \qquad \angle ⑧⑦⑩$$

归纳一下前面的计算结果，得：

$$\varphi_1=\overset{\frown}{④⑧}=74^\circ 41' 30''$$

$$\varphi_2=\overset{\frown}{④⑥}=\overset{\frown}{④⑧}-\overset{\frown}{⑥⑧}=50^\circ 48' 50''$$

$$\varphi_3=\overset{\frown}{⑦⑧}=106^\circ 45' 10''$$

$$\varphi_{21}=\angle ⑧④⑪=180^\circ-\angle ②④⑧=140^\circ 47' 50''$$

$$\varphi_{23}=\angle ⑧⑥⑪=180^\circ-\angle ②⑥⑧=132^\circ 40' 50''$$

$$\varphi_{24}=\angle ⑩⑦⑫=180^\circ-\angle ⑧⑦⑩=150^\circ 40' 30''$$

$$\varphi_{25}=\angle ⑩⑧⑦=180^\circ-\angle ②⑧④=63^\circ 06' 10''$$

3. 求图 3-63 所需要的尺寸

从图 3-62 可得：

$$L_{21}=\sqrt{720^2+(1015-600)^2+(180-80)^2}=837.033$$

$$L_{25}=\sqrt{(1015-500)^2+(700-180)^2}=731.864$$

现在图 3-63 的主要角度和尺寸，都已求出来了。这个框架的外形也就确定了。

[General Information]
书名=球面三角在机械工业中的应用
作者=金凤久
页数=137
SS号=10256479
DX号=
出版日期=1990年06月第1版
出版社=国防工业出版社